

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

59e jaargang
1983/1984
nr. 5
januari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, giro: 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-226886. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 0165-0394

Over het onderzoeken van functies

Verlopen

M. C. VAN HOORN

Tot de kennis die leerlingen zich eigen moeten maken behoort een hoeveelheid afspraken.

1 $\langle a, b\rangle$ is de notatie voor een open interval, zoals veel wiskundeleraren mochten ontdekken bij de aanvang van hun leraarschap; in hun schooltijd gold een andere afspraak.

2 Vectornotaties behoren evenzeer tot de afspraken die de leerlingen voorgeschoteld krijgen.

3 (0, 0) a (−1, 0) (0, 0) (1, 0) P (0, −1)

Punt P heeft coördinaten ($\cos a, \sin a$) en – bijvoorbeeld – niet andersom, zoals ergens een kandidaat meende.

4 De opdracht 'Onderzoek de functie f' betekent dat van een bepaalde, gegeven functie f een aantal wetenswaardigheden moet worden opgesomd. Tot de hierbij gevraagde wetenswaardigheden behoort sinds enkele jaren het tekenverloop van de functie. Dit onderdeel van het functie-onderzoek is niet onomstreden. In dit artikel wordt vooral hierop nader ingegaan.

Over afspraken

Er zijn diverse afspraken waarover weinig discussie bestaat. Er moet nu eenmaal een notatie voor open intervallen zijn. Formeel gezien is er geen verschil tussen de verschillende afspraken die gemaakt zouden kunnen worden.

Over vectornotaties wordt vaker gediscussieerd, wat ongetwijfeld verband houdt met (veronderstelde) verschillen in vectornotie. De namen sinus en cosinus zal niemand willen wijzigen, of verwisselen. Onderscheid tussen verschillende noties (sinus en cosinus als verhouding, of als functie) kan niettemin wel op zijn plaats zijn.

De gememoreerde afspraak omtrent het functie-onderzoek heeft een betrekkelijk geringe draagwijdte: deze afspraak is alleen van belang voor de examenkandidaten havo en vwo (voor zover ze wiskunde kozen, uiteraard). Het is helemaal niet erg als ze de afspraak direct na het examen weer vergeten.

Bij het l.o.-examen geldt kennelijk een andere afspraak, getuige de bespreking van het schriftelijk examen wiskunde l.o. 1982 (uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 70/aflevering 1, p. 12-13.

Analyse I

(27 april, 9.30-12.30 uur)
2. *Voor elke* $p \in \mathbb{R}^+$ *is gegeven de functie met domein* $\mathbb{R}$
$f_p : x \rightarrow \exp(-px^2)$.
a. Onderzoek f_1 *en bereken de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van* f_1 *en teken de grafiek van* f_1.

Opl. a. De afgeleide van $f_1 : x \rightarrow \exp(-x^2)$ is $f'_1 : x \rightarrow -2x \cdot \exp(-x^2)$. De tweede afgeleide is $f''_1 : x \rightarrow (4x^2 - 2) \cdot \exp(-x^2)$. Uit hun tekenschema's blijkt: $f_1(0) = 1$ is het maximum van f_1; $B_1(-\frac{1}{2}\sqrt{2}; e^{-\frac{1}{2}})$ en $B_2(\frac{1}{2}\sqrt{2}; e^{-\frac{1}{2}})$ zijn de buigpunten van de grafiek van f_1. Deze grafiek is symmetrisch t.o.v. de lijn $x = 0$ en heeft de x-as als asymptoot.

Het tekenverloop van de functie behoeft op het l.o.-examen niet te worden gerapporteerd.

Het afleiden van eigenschappen van grafieken

Op examens wordt vaak gevraagd een functie te onderzoeken; in de regel moet ook de grafiek worden getekend. Het functie-onderzoek dient dan om de eigenschappen van de grafiek precies te bepalen.
De vraag 'Teken de grafiek van de functie f' houdt in, volgens een ook voor havo- en vwo-kandidaten geldende afspraak, dat de betreffende functie eerst moet worden onderzocht; dit tenzij de grafiek afgeleid wordt uit de grafiek van een zogenaamde standaardfunctie. Hier duikt weer een afspraak op: sommige functies zijn standaardfuncties. Examenkandidaten dienen te weten welke dat zijn. Bij het examen havo 1979-I wisten veel kandidaten niet dat $x \rightarrow -\cos x$ geen standaardfunctie genoemd wordt. Voor hen was het wèl een standaardfunctie.

5. Met domein $[0, \pi]$ zijn gegeven de functies
$f : x \rightarrow \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ en $g : x \rightarrow -\cos x$
a. Bereken de x-coördinaat van het snijpunt van de grafieken van f en g. Teken deze grafieken ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy.

CORRECTIEVOORSCHRIFT

5. *a.* 6 punten;	voor de x-coördinaat van het snijpunt	3 punten
	voor de grafiek van f	2 punten
	indien elke toelichting ontbreekt ten hoogste 1 punt toekennen	
	voor de grafiek van g	1 punt
	indien elke toelichting ontbreekt geen punt toekennen	

Terzijde zij opgemerkt dat bij de afleiding van een grafiek uit de grafiek van een standaardfunctie geen aandacht behoeft te worden geschonken aan het domein (dat is althans de kennelijke, stilzwijgend gemaakte afspraak). Zie weer opgave 5 uit het examen havo 1979-I. De grafiek van de functie $x \to \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ onstaat uit de grafiek van de standaardfunctie $x \to \sin x$ door een translatie in horizontale richting. De functie $x \to \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ is gegeven op een beperkt domein; een opmerking over het domein van de functie $x \to \sin x$ xou hier toch wel op zijn plaats zijn!
Onmiskenbaar worden de gezochte eigenschappen van de grafiek van de betreffende functie ook *bewezen* door afleiding uit de grafiek van een standaardfunctie. Als er geen standaardfunctie beschikbaar is, moet er een functie-onderzoek plaats vinden.
Dit verhaal geldt voor havo- èn voor vwo-kandidaten; vwo-kandidaten moeten, terecht natuurlijk, méér onderzoeken dan havo-kandidaten.

Stijgen en dalen

In een functie-onderzoek wordt vaak een belangrijke plaats ingenomen door het stijg- en daalschema van de functie; dit levert onder andere de (eventuele) extrema van de functie. In de praktijk wordt genoegen genomen met het tekenschema van de afgeleide functie. Het belang van het tekenverloop van de afgeleide functie is duidelijk, maar het stijgen en dalen van de functie kan soms op een andere manier worden nagegaan.
Zo moet elke kandidaat weten dat functies van de soort $x \to {}^{g}\log(ax + b)$ monotoon zijn; onder andere bij ongelijkheden is dat van belang. In opgave 3*c* van het examen havo 1980-I konden de kandidaten deze kennis gebruiken.
Het stijgen of dalen van een functie van de soort $x \to {}^{g}\log(ax + b)$ volgt door de bepaling van twee functiewaarden; het stijgen of dalen volgt even goed uit de waarden van g en a.
Bij het tekenen van de grafiek van een functie van de soort $x \to {}^{g}\log(ax + b)$ behoeven examenkandidaten deze kennis niet ten toon te spreiden; daar worden ze althans niet voor beloond.

3. Van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zijn gegeven de functies
   $f: x \to 1 - {}^{3}\log(x - 3)$ en $g: x \to {}^{3}\log(2x - 1)$.
   a. De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S.
   Bereken de coördinaten van S.
   b. Teken in één figuur de grafieken van f en g.
   c. Voor welke x geldt: $f(x) \geqq -2$?

CORRECTIEVOORSCHRIFT

3.	*a.*	6 punten;	voor de vergelijking $2x^2 - 7x = 0$	3 punten
			voor het verwerpen van $x = 0$	1 punt
			voor de coördinaten van S	2 punten

b.	6 punten;	voor elke grafiek	3 punten
		voor elke ontbrekende asymptoot 1 punt aftrekken. Indien niet is aangegegeven hoe elke grafiek uit de grafiek van $x \rightarrow {}^3\log x$ kan worden afgeleid, in beide gevallen 1 punt aftrekken.	
c.	6 punten;	voor ${}^3\log(x - 3) \leqq 3$	2 punten
		voor $x > 3$	1 punt
		voor $x \leqq 30$	3 punten

De onderhavige functies kunnen door havo-kandidaten niet worden 'onderzocht', omdat havo-kandidaten deze functies niet kunnen differentiëren. Dus moet de grafiek van de functie $x \rightarrow {}^3\log(2x - 1)$ afgeleid worden uit de grafiek van de standaardfunctie $x \rightarrow {}^3\log x$. Dat kan met een lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de y-as, gecombineerd met een translatie; het kan ook met de translatie met vector $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ {}^3\log 2 \end{pmatrix}$. Over beide is destijds gemopperd, begrijpelijkerwijs. Hoeveel leraren gebruiken zulke transformaties in zo'n geval?
Deze ervaring lijkt te pleiten voor een verfijning van de afspraak over het functieonderzoek: de onderhavige functie moet worden gedifferentieerd, *tenzij* het stijg- en daalschema langs andere weg kan worden afgeleid.
Zulk een verfijning zou echter leiden tot verdere bureaucratisering van de normering. Verdergaande verfijning zou het gevolg kunnen zijn, omdat vastgelegd zou moeten worden welke technieken toegestaan zijn bij de diverse soorten functies.
Bij functie-onderzoeken moet ruimte gelaten worden voor verschillende redeneringen. Eerste en tweede corrector moeten beoordelen of functie-onderzoeken solide genoeg zijn.

Waar gaat het om?

Een functie-onderzoek dient, zoals gezegd, in de regel om een grafiek te kunnen tekenen. Van examenkandidaten mag worden geëist dat ze bepaalde eigenschappen van de functie (en daarmee eigenschappen van de grafiek) *bewijzen*. Dàt is onderzoek. Het is logisch dat de nadruk ligt op het onderzoek.
Veel functie-onderzoeken vertonen overeenkomstige vorm-kenmerken. Deze praktijk heeft kennelijk in de hand gewerkt dat zekere vorm-kenmerken verplicht zijn gesteld, óók in gevallen waarin de betreffende vorm-kenmerken misbaar zijn (zoals bleek in het voorbeeld van de logaritmische functies).
Met deze opmerking is nog niet aangegeven hoe een onbureaucratische normering er uit zou kunnen zien. Maar discussies over 'bewijzen' zullen altijd wel voortduren; als wiskundige kun je het toejuichen dat de nadruk op zulke discussiethema's komt te liggen.
Een iets ruimere formulering van onderdeel *g* van de tegenwoordig gebruikelijke bindende normen lijkt zeker mogelijk.

g. Bij de vaststelling van de normering voor onderdelen van een vraagstuk is meestal uitgegaan van een bepaalde methode van oplossing. Indien een kandidaat een andere, juiste methode van oplossen heeft gevolgd, dienen de punten toegekend te worden op een wijze die zo goed mogelijk aansluit bij de gegeven normering.

In het voorgaande ging het over de vraag waartoe een functie-onderzoek wordt uitgevoerd. Met evenveel recht mag gevraagd worden waartoe een grafiek wordt getekend. In het bestek van dit artikel blijft een bespreking van deze vraag achterwege.

Het tekenverloop van de functie

Sinds een aantal jaren behoort het opstellen van het tekenverloop (tekenschema, tekenoverzicht) van de functie tot de verplichte onderdelen van het functie-onderzoek. In een brief van de (toenmalige) CVO, gedateerd 14 november 1979, wordt dat gemotiveerd.

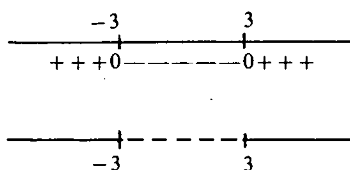
> Tenslotte wordt de aandacht gevestigd op een bepaald onderdeel van het onderzoek van een functie n.l. het tekenschema van de functie.
> Het tekenschema van de functie is een wezenlijk onderdeel van het onderzoek van een functie.
> De beperking tot het bepalen van de snijpunten van de grafiek van de functie met de x-as kan zeer nadelige gevolgen hebben voor die kandidaten die bij het onderzoek van de functie één of meer rekenfouten maken.
> Het tekenschema van een functie geeft een goede controle-mogelijkheid om na te gaan of de grafiek van de functie in die delen van het platte vlak gelegen is die door het tekenschema van de functie zijn aangegeven.
> Dat is de reden waarom dit onderdeel van het onderzoek van een functie is opgenomen. In het correctievoorschrift zullen steeds één of meer punten voor dit onderdeel worden toegekend.

De CVO verklaart in deze brief dus dat het tekenschema geëist wordt omdat er kandidaten zijn die fouten maken, en nergens anders om. Voor een kandidaat die geen fout maakt heeft het tekenschema geen zin, zegt de brief. Het mag geen wonder heten dat dit onderdeel van het functie-onderzoek omstreden is!
Men zou kunnen stellen dat de CVO (en tegenwoordig de CEVO) probeert een stukje wiskunde-didactiek verplicht te stellen. De CVO/CEVO schept hiermee een precedent dat ongekende perspectieven opent. Wat is de volgende controle-mogelijkheid die verplicht gesteld gaat worden?

Het tekenen van het tekenverloop

Er zijn – gelukkig – geen regels gesteld voor het tekenen van tekenoverzichten. In de verschillende wiskunde-methodes gebeurt het op verschillende manieren.

Het tekenoverzicht van $x^2 - 9$ kan er zó uitzien:



Deze beide verschijningsvormen kan men aantreffen in bestaande methodes. In andere methodes komen andere varianten voor.
Zoals hier al te zien is, bestaat er geen eenstemmigheid over het wel of niet aangeven van de nulwaarden in het tekenoverzicht. Er bestaat evenmin eenstemmigheid omtrent het aangeven van verticale asymptoten, en omtrent het aangeven van beperkingen van het domein. Rampzalig is dit niet, en het is ook niet nodig dat zulke eenstemmigheid ontstaat. Degene die op ondubbelzinnige wijze wil aaangeven waar de functie-waarden positief, nul of negatief zijn, waar verticale asymptoten voorkomen en waar de functie niet gedefinieerd is, kan eenvoudigweg de grafiek tekenen.
Duidelijker gezegd: de grafiek representeert op ondubbelzinnige wijze het tekenverloop. Een examenkandidaat die de grafiek van de functie correct tekent, heeft daarmee ook het tekenverloop van de functie getekend. Als zo'n kandidaat niet de beschikbare punten worden toegekend voor het opstellen van het tekenverloop van de functie, dan kan die kandidaat naar de rechter stappen om die punten alsnog toegekend te krijgen.

Slot

Een tekenschema is objectief-scoorbaar, een bewijs misschien niet.
Een bewijs móet, een tekenschema hoeft misschien niet.

Ontvangen

Hans Freudenthal, Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, uitg. Reidel, Dordrecht, 595 pag., *f* 215,–.
Boekbespreking volgt t.z.t.

Kanttekeningen bij het examen wiskunde II, 1983-I

TON LECLUSE

Naar ik meen mag de leerling ervan uitgaan, dat de examenopgaven in orde zijn. Wanneer een opgave stelt: 'Er is een spiegeling die ...', dan mag de leerling m.i. ervan uitgaan dat die spiegeling existeert, m.a.w. dat de gegevens geen tegenspraak bevatten. Helaas zijn de opstellers van de normen het niet met mij eens, en zelfs niet met zichzelf!

1. In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de punten $O(0,0,0)$, $A(-3,6,0)$, $B(6,0,6)$ en voor elke $p \in \mathbb{R}$ het punt $C(9,6,p)$.
   a. De afstand van C en het vlak ABO is gelijk aan 5.
   Bereken p.
   b. Bij een spiegeling S in een lijn s is $S(O) = B$ en $S(A) = C$.
   Bereken p en stel een vectorvoorstelling op van s.
   c. Bij een rotatie R om de lijn $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ is $R(A) = C$.
   Bereken p en de coördinaten van $R(B)$.

Normen

b.	11 punten;	voor de constatering dat s door het midden van OB moet gaan	2 punten
		voor de constatering dat s door het midden van AC moet gaan	2 punten
—		voor een richtingsvector van s is $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ \frac{1}{2}p - 3 \end{pmatrix}$	1 punt
		voor $s \perp OB$ geeft $p = 6$	2 punten
⟶		voor $s \perp AC$ geeft $p = 0 \vee p = 6$	2 punten
		voor $p = 6$	1 punt
		voor een vectorvoorstelling van s	1 punt
c.	11 punten;	voor het vlak α door A, loodrecht l	1 punt
		voor C in α geeft $p = 12$	1 punt
		voor in α is het rotatiemiddelpunt $M(3,6,6)$	2 punten
		voor de rotatiehoek is 180°	2 punten
		voor $R(B)$ ligt in vlak $\beta // \alpha$ door B	1 punt
		voor in β is het rotatiemiddelpunt $(4\frac{1}{2}, 6, 4\frac{1}{2})$	1 punt
		voor de coördinaten van $R(B)$ zijn $(3,12,3)$	3 punten

ad normen van opg. 1b. Volgens de opgavestelling bestaat de spiegeling S. Een leerling die de methode van de normen volgt, hoeft '$s \perp AC$' niet te gebruiken om het juiste antwoord te vinden. Dit kost echter volgens die normen 2 punten!!

ad normen van opgave 1c. Hier, INEENS, hoeft *niet* gecontroleerd te worden door de leerling, of de gegevens geen tegenspraak bevatten. Een leerling die de methode van de normen toepast en dus niet uitdrukkelijk controleert of $MA = MC$, krijgt wèl het volle pond.

2. In R_3 zijn ten opzichte van een orthonormale basis gegeven de punten $O(0,0,0)$, $A(2,0,4)$, $B(2,2,4)$ en voor elke $p \in \mathbb{R}$ de punten $C(0,2,p)$ en $D(4,p,6)$.
   a. Bereken CD in het geval dat de vlakken ABC en ABD elkaar loodrecht snijden.
   b. Onderzoek of voor elke $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ geldt: D ligt buiten de bol die door O, A, B en C gaat.
   c. Neem $p = 1$.
   Bij een vermenigvuldiging met factor f ten opzichte van het punt $P(6, -3, 11)$ snijdt het beeld van het lijnstuk AB de lijn CD.
   Bereken f en de coördinaten van dat snijpunt.

Normen

c. 12 punten; voor het beeld van A is $A'(6 - 4f, -3 + 3f, 11 - 7f)$ — 2 punten

voor het beeld van B is $B'(6 - 4f, -3 + 5f, 11 - 7f)$ — 2 punten

— voor lijnstuk $A'B'$: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 6 - 4f \\ -3 + 3f \\ 11 - 7f \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge$

$0 \leqq \lambda \leqq 2|f|$ — 3 punten

(fout, nl. λ van 0 t/m $2f$ wel.)

indien de voorwaarde voor λ niet is vermeld 2 punten aftrekken

voor CD: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ — 1 punt

2 punten

voor de coördinaten van het snijpunt $(1, 1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4})$ — 2 punten

of

voor ABP: $7x_1 - 4x_3 = -2$ — 2 punten

— voor CD: $= \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ — 1 punt

voor de coördinaten van het snijpunt $S(1, 1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4})$ — 2 punten

voor de coördinaten van het snijpunt T van PS met AB is $(2, \frac{4}{5}, 4)$ — 2 punten

⟶ voor T op lijnstuk AB — 2 punten

voor $f = \frac{5}{4}$ — 3 punten

ad normen van opg. 2c. Volgens de opgavestelling existeert de vermenigvuldiging,

die dus aan alle gegevens voldoet. Dus snijdt het beeld van lijnstuk AB de lijn CD. Omdat dit gegeven is, *hoeft de leerling dus niet te controleren* of het snijpunt van de beeldlijn van AB met lijn CD tussen A en B inligt. Helaas, deze leerling betaalt hiervoor 2 punten! Dit staat uitdrukkelijk in de normen vermeld.

Het zal een ieder duidelijk zijn, dat deze 'bindende' normen niet overal door mij toegepast konden worden.

3. In R_2, voorzien van een orthonormale basis, liggen de punten O, A, B en C met respectievelijk de plaatsvectoren $\bar{o}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{a} + \bar{b}$.
De vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ zijn onafhankelijk.
Het punt D is het beeld van A bij de rotatie om O over $-90°$.
Het punt E is het beeld van B bij de rotatie om O over $90°$.
Het midden van lijnstuk DE is punt M, het midden van lijnstuk AD is punt P en het midden van lijnstuk BE is punt Q.
   a. Bewijs dat $MO \perp AB$ en $MO = \frac{1}{2}AB$.
   b. Het zwaartepunt van driehoek CPQ valt samen met het zwaartepunt van driehoek ABO.
   Bewijs dat $\bar{a} \perp \bar{b}$ en $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.
   c. De projectie van A op de lijn BO is punt F, gelegen tussen B en O.
   Gegeven is $BO = 3$, $FO = 2$ en de oppervlakte van $\triangle DEO = 4$.
   Bereken AO.

Normen

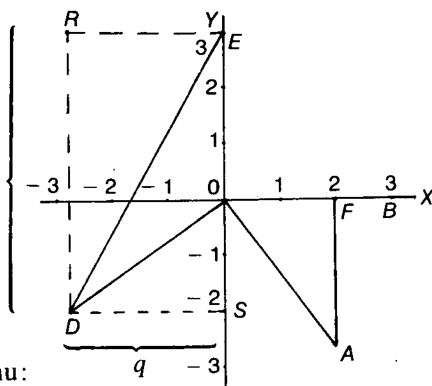
c. 11 *punten;*	voor $\bar{a} \cdot \bar{b} = 6$	3 punten
	voor $3|\bar{a}| \cos \angle AOB = 6$	2 punten
	voor $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |\bar{a}| \sin \angle AOB = 4$	3 punten
	voor $AO = 3\frac{1}{3}$	3 punten

ad opgave 3c. Een opgave voor tweedeklassers!
Deze opgave was voor mijn leerlingen erg lastig. Ook de normen gingen uit van een nogal onhandige aanpak: stel $A = (a_1, a_2)$ enz. En dan maar alles in a_1, a_2, b_1 en b_2 uitdrukken! Om het rekenwerk te beperken gebruikte men nog even de oppervlakteformule $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$ en de formule $\sin(180° - x) = \sin x$.
De volgende uitwerking kan een tweedeklasser goed aan, ja, bij een geschikte presentatie van de gegevens ook zonder hulp van de docent. Benodigde voorkennis:
1 Berekening opp. driehoek m.b.v. rechthoek eromheen
2 stelling van Pythagoras.
'Truc': *kies het assenstelsel verstandig*: de assen langs OB en OE.
De gegevens zijn dan: $O = (0,0)$, $B = (3,0)$, $F = (2,0)$, $OA \perp OD$ en $OA = OD$ en opp. $\triangle ODE = 4$.
Gevraagd wordt OA.

Oplossing:
Stel $FA = q$.
Dus $A = (2, -q)$ en $D = (-q, -2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{opp.}\ \triangle ODS = \tfrac{1}{2} \cdot q \cdot 2 = q \\ \text{opp.}\ \triangle DER = \tfrac{1}{2} \cdot q \cdot 5 = 2\tfrac{1}{2}q \\ \text{opp.}\ \square\ DSER = q \cdot 5 = 5q \end{array}\right\}$$

dus opp. $\triangle ODE = 1\frac{1}{2}q = 4$ (gegeven)
dus $q = 2\frac{2}{3}$.



Stelling van Pythagoras in $\triangle OAF$ geeft nu:

$$OA^2 = 2^2 + (2\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{100}{9} \text{ dus } OA = 3\tfrac{1}{3}$$

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Collegium Marianum en het Avondcollege, beide in Venlo.
Hij heeft ruim 8 jaar leservaring op HAVO-VWO.

Boekbespreking

F. Lorenz, *Lineaire Algebra 1*, Hochschultaschenbücher Band 601, Bibliografisch Institut, Mannheim, 1981, 223 blz., DM 19,80.

Het onderhavige boek is het eerste van twee delen die een inleiding in de lineaire algebra geven. Het eerste deel bestaat uit de volgende hoofdstukken: 1. Lineaire vergelijkingen, 2. Vectorruimten, 3. Lineaire afbeeldingen, 4. Determinanten, 5. Eigenvectoren en het karakteristieke polynoom van een endomorfisme.
De behandeling van de diverse onderwerpen is nauwkeurig en zeer grondig. Op enkele voorbeelden na vindt men in het boek geen meetkunde – een in het voorwoord verantwoorde keuze van de auteur. Het boek bevat slechts enkele eenvoudige opgaven, waarvan geen antwoorden gegeven worden. Het tweede deel echter zal worden afgesloten met een kleine opgavenverzameling.
Het boek is overzichtelijk uitgevoerd; belangrijke woorden of zinnen zijn onderstreept en belangrijke stellingen omlijnd. Voor wie zijn kennis eens wil opfrissen een geschikt boek. Minder geschikt lijkt het mij om vanuit dit boek voor het eerst kennis te maken met de lineaire algebra.
Ik zou het boek met één woord willen karakteriseren: grondig.

R. Bosch

Problemen oplossen in de brugklas

ERNIC KAMERICH

1 Inleiding

Beginnende hospitanten hoor ik soms met enige verbazing constateren, dat in de verschillende klassen van de onderbouw vwo/havo in de lessen algebra eigenlijk voortdurend dezelfde zaken ter sprake komen.
Ik kan hun niet geheel ongelijk geven: in de 2e, 3e en 4e klassen moet doorgaans een niet onaanzienlijk deel van de tijd en de aandacht besteed worden aan het herstellen van fouten die leerlingen maken in brugklasstof algebra. Ik heb de indruk, dat veel leerlingen in de loop van enkele jaren leren rekenen met variabelen door trial and error en met een minimum aan inzicht; zoals leerlingen het zelf uitdrukken: leren wat er 'mag' en 'niet mag'.
Een dergelijke wijze van leren is verre van optimaal [1]. Het afleren van fouten kost immers relatief veel moeite en bovendien is dit voor leerlingen frustrerend. Daar komt dan nog eens het gevoel van onzekerheid bij dat leerlingen krijgen door onzekerheid over wat er 'mag' en 'niet mag'. Tegenzin in wiskunde moet naar mijn idee voor een belangrijk deel aan deze onzekerheid worden toegeschreven. Die tegenzin kan immers ineens omslaan in plezier zodra een leerling het gevoel krijgt de zaak weer te begrijpen, weer op vaste bodem te komen; iets dat iedere leraar, denk ik, wel uit eigen ervaring weet. Ik geloof dat die onzekerheid bij veel leerlingen in 2e, 3e en 4e klassen haar wortels heeft in de brugklas.
Het lijkt me, dat, als je aan bovengenoemde problemen wat wilt doen, dit staat of valt met wat er in de brugklas gebeurt. Allerlei mensen zijn bezig met wiskunde voor de brugklas. Ook J. J. M. Cuypers ('s Hertogenbosch) en ik hebben ideeën hiervoor ontwikkeld en lesmateriaal gemaakt en dit in de klas gebruikt. De didactische achtergrond van ons materiaal sluit aan bij gangbare gedachten over didactiek van wiskunde. Over een deel van dit materiaal, ideeën erachter en ervaringen ermee wil ik u in dit artikel en de twee volgende vertellen. Ook voor hen die (in de brugklas en daarna) lesgeven met een der gangbare methoden kunnen hopelijk (sommige van) die ideeën en ervaringen bruikbaar zijn.
Wiskunde is allereerst een vak waarin problemen opgelost worden; het rekenen met variabelen is hierbij slechts een hulpmiddel. In dit artikel wil ik dan ook twee problemen voor de brugklas onder de loep nemen en daaruit enkele gedachten over het bedrijven van wiskunde afleiden die ons geïnspireerd hebben bij het lesgeven in de brugklas (en ook verder op). In het volgende artikel komt dan de

behandeling in de brugklas van eigenschappen van de operaties, met name optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, aan de orde. Het derde artikel gaat over introductie van en omgang met variabelen.

2 Een voorbeeld van het oplossen van een probleem in een brugklas

In een van de eerste lessen wiskunde in een brugklas heb ik wel eens het volgende probleem aan de leerlingen voorgelegd (in uitgebreidere formulering):

> 'Aan de oneven-nummer-kant van een straat hebben de huizen de nummers 1, 3, 5, 7, enz. Als het hoogste nummer 957 is, hoeveel huizen staan er dan aan die kant van de straat?'

Bij het oplossen van dit probleem in de klas werd het tellen gesystematiseerd met de volgende tabel:

huisnummer		1	3	5	7	9	....
	+1 ↓						
		2	4	6	8	10	....
	:2 ↓						
telnummer		1	2	3	4	5	....

Daaraan kon je zien, dat je het aantal huizen kunt berekenen door bij het hoogste nummer 1 op te tellen en dan het resultaat door 2 te delen. Deze manier kon toen zó worden geformuleerd:

het aantal huizen = (het grootste huisnummer + 1) : 2*

Laten we nu eens de geschetste oplossing wat meer in detail bekijken om te zien wat je met zo'n probleem in de klas kunt doen en welke kansen je dan hebt om zaken te accentueren die voor het leren van wiskunde van belang zijn.
Schematisch weergegeven kan een oplossingsproces als volgt verlopen:
Eerst eens enkele *speciale gevallen oplossen:*

het 1e huis heeft nummer 1;
het 2e huis heeft nummer 3;
het 3e huis heeft nummer 5;
.
.
.
het 20e huis heeft nummer 39; enz.

Zit hier *systeem* in?
Je vermoedt, dat je in iedere regel het rechter getal kunt vinden door het linker met 2 te vermenigvuldigen en dan 1 af te trekken. Dat kun je op brugklas-niveau goed *inzien*: als je de getallen 1, 2, 3, 4, 5, enz. met 2 vermenigvuldigt krijg je juist

* Op het in de klas construeren van zulke formules kom ik in een volgend artikel terug.

de rij even getallen vanaf 2; als je dan van elk getal in de rij 1 aftrekt, dan krijg je de rij oneven getallen vanaf 1. Een *tabel* maakt dit overzichtelijk:

rij telnummers		1	2	3	4	5	6	....
	$\times 2$ ↓							
rij even getallen		2	4	6	8	10	12	....
	-1 ↓							
rij huisnummers		1	3	5	7	9	11	

Eigenlijk leidt dit tot het oplossen van een ander, zogezegd het omgekeerde probleem:

'Wat is het huisnummer van het zoveelste huis in de straat?'

Dit probleem wordt hier opgelost door verbanden te leggen tussen de rijen in de tabel d.m.v. rekenvoorschriften. Het oorspronkelijke probleem wordt nu opgelost door in de tabel omhoog te lopen: door na te gaan welk getal boven 957 in de eerste rij staat.
Bij het oplossen van het probleem speelt de volgende *heuristiek* een leidende rol: door het tellen concreet voor kleine aantallen uit te voeren en daarbij naar regelmaat te zoeken kom je hier tot een algemeen inzicht, en dit kun je dan toepassen. Schematisch kan deze heuristiek zo worden beschreven:

speciale gevallen oplossen
dan door *systematiseren* komen tot
(inzichtelijke) *generalisatie*
en dan deze *toepassen* op het concrete probleem.

De rol van deze heuristiek kun je in dit geval accentueren door:
0 de behandeling te beginnen met het stellen van een probleem dat vingers en hersens op het eerste gezicht ver te boven gaat, zoals:
'Hoeveel huizen staan er aan de oneven kant, als het hoogste nummer 957 is?'
1 deze schijnbaar hopeloze klus uit te stellen en voor te stellen maar 'ns eerst met kleinere huisnummers te gaan puzzelen
2 en dan naar een systeem te vragen en de leerling te laten uitleggen, dat zijn/haar systeem echt goed is;
3 dit systeem te laten formaliseren
4 en het vervolgens toe te laten passen.

Het generaliseren bestaat hier uit het maken en beschrijven van de *functie*:

telnummer → huisnummer

Dat ligt voor de hand: tellen is niets anders dan het maken van een bijectie tussen de verzameling van de te tellen objecten en een beginstuk van $\mathbb{N}$. Daarbij hoef je als leraar in de klas natuurlijk niet het woord 'functie' te gebruiken, laat staan over het begrip functie te praten; dat kan later wel, bijvoorbeeld in de 2^e^ klas. Het is wel fijn als leerlingen bij de introductie van het begrip functie hierop voorbereid zijn door allerlei voorbeelden.
In het bovenstaande voorbeeld spelen tevens het *samenstellen* van functies en het

inverteren (van bijecties) een rol, blijkbaar elementaire zaken, die heel vanzelfsprekend gebruikt worden door brugklasleerlingen bij een dergelijk probleem. Het idee van een functie komt bij de hier geschetste oplossing tot uiting door het opschrijven van een tabel voor die functie en door beschrijving van die functie:

- met een rekenvoorschrift bestaande uit elementaire rekenstappen, zoals: $\xrightarrow{+1}$ $\xrightarrow{:2}$;
- met een formule.

3 Voorbeeld 2: het oplossen van een vergelijking

Als tweede voorbeeld van het oplossen van problemen zullen we hier een opgave bekijken, die brugklasleerlingen vwo/havo volgens gebruikelijke programma's tegen het eind van het schooljaar (zouden) moeten kunnen maken:

Los op: $?x \in \mathbb{Q}: x - 8 - 2(3 + 5x) = -27.$*

Om deze vergelijking op te lossen herleid ik eerst het linkerlid tot

$(-9) \cdot x - 14$

Zo heb ik het probleem omgezet in een eenvoudiger probleem:

Los op: $?x \in \mathbb{Q}: (-9) \cdot x - 14 = -27$

Deze vergelijking kan ik oplossen met behulp van verdere equivalenties: eerst 'aan beide kanten 14 optellen', daarna 'beide kanten delen door −9'. Het kan ook meer elementair, op de manier die in onderstaand schema is weergegeven, en zo kun je beter aansluiten bij de manier waarop brugklasleerlingen zulke problemen (of eenvoudiger versies) vaak spontaan aanpakken:

stap	probleem	probleemstap	oplossingsstap
1	$?x \in \mathbb{Q}: (-9) \cdot x - 14 = -27$	$... - 14 = -27$	vul in: -13
2	$?x \in \mathbb{Q}: (-9) \cdot x = -13$	$(-9) \cdot ... = -13$	vul in: $\frac{-13}{-9}$

oplossingsverzameling: $\left\{\frac{13}{9}\right\}$

* 'Los op: $?x \in \mathbb{Q}$:' kan naar eigen smaak gelezen worden als:
'Beschrijf de verzameling van rationale getallen x, zodat',
'Voor welke $x \in \mathbb{Q}$',
'Los x op in $\mathbb{Q}$',
of iets van gelijke strekking.

Om te weten welke stappen je moet nemen, met name om te weten dat je niet moet beginnen met '$(-9) \cdot ... = -27$', moet je eerst het linkerlid van de vergelijking analyseren. Die analyse kan ik voor mezelf het gemakkelijkst beschrijven in de taal van functies:
De functie $x \rightarrow (-9) \cdot x - 14$ met domein $\mathbb{Q}$ is te zien als een samenstelling van elementaire functies:

$$x \xrightarrow{\cdot(-9)} (-9) \cdot x \xrightarrow{-14} (-9) \cdot x - 14$$

In deze taal kun je de bovenstaande oplossing zó opschrijven:

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\cdot(-9)} & (-9) \cdot x & \xrightarrow{-14} & (-9) \cdot x - 14 \\ -13 & & -13 & & -27 \\ \hline -9 & \xleftarrow{:(-9)} & & \xleftarrow{+14} & \end{array}$$

U ziet, dat bij het op elementaire wijze oplossen van de vergelijking

$$?x \in \mathbb{Q} : x - 8 - 2(3 + 5x) = -27$$

de volgende weg bewandeld is:

a de vergelijking is omgezet in een equivalente vergelijking van type: 'Los op: $?y \in A : f(y) = a$', waarbij f een *functie* op A is;
b f is beschreven als een *samenstelling* van functies zó dat elk ervan een *inverse* functie heeft waarvoor leerlingen gemakkelijk een rekenvoorschrift kunnen geven;
c de vergelijking is nu opgelost door *stapsgewijs terug* te *lopen* van beeld naar volledig origineel.

Veel vergelijkingen (en ook ongelijkheden) kunnen langs zo'n weg worden opgelost en worden in feite ook vaak zo opgelost. Als we de leerlingen in de brugklas niet alleen willen leren bepaalde typen vergelijkingen op te lossen, maar ook iets over het aanpakken van vergelijkingen (en ongelijkheden) die ze later (op school en/of daarna) tegen kunnen komen, dan is het m.i. nuttig bovenstaande punten bij de behandeling van dergelijke vergelijkingen tot uiting te laten komen [2].
Dat kan eenvoudig door het laatste deel van de oplossing met functiepijlen op te (laten) schrijven, zoals in bovenstaand voorbeeld gebeurd is.
Ik heb vergelijkingen en ongelijkheden waarop de hier genoemde heuristiek van toepassing is, op basis van het bovenstaande behandeld (niet alleen in de brugklas maar ook daarna). Daar heb ik goede ervaringen mee:
- Het biedt leerlingen meer houvast: er komen normaal geen problemen in de trant van: 'Moet ik nu eerst beide kanten delen door 3 of eerst het kwadraat wegwerken?' Bovendien geeft het richting bij het omzetten van de gegeven vergelijking in een equivalente vergelijking (stap a).

- Er treedt inderdaad transfer op naar het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden van nieuwe types. Een duidelijk voorbeeld hiervan zag ik in een derde klas atheneum:

Ik had de functie $x \to |x|$ besproken en de leerlingen enkele substitutie-opgaven laten doen zoals: 'Als $p = 3$, dan $|6 - 5p| - 10 = \ldots$'. Zonder verdere voorbereidingen heb ik daarna in een schriftelijk werk de vergelijking opgegeven:

$$\text{Los op: } ?x \in \mathbb{R} : |2x - 5| + 7 = 100$$

Ondanks het feit dat dergelijke vergelijkingen niet aan de orde waren geweest losten toch bijna alle leerlingen deze vergelijking goed op; zij schreven de oplossing inderdaad ook ongeveer zó op:

$$x \xrightarrow{\cdot 2} 2x \xrightarrow{-5} 2x - 5 \xrightarrow{|\ |} |2x - 5| \xrightarrow{+7} |2x - 5| + 7$$

$$\left.\begin{matrix}49\\-44\end{matrix}\right\} \xleftarrow{:2} \left.\begin{matrix}98\\-88\end{matrix}\right\} \xleftarrow{+5} \left.\begin{matrix}93\\-93\end{matrix}\right\} \longleftarrow 93 \xleftarrow{-7} 100$$

4 Didactische conclusies

Uit het voorgaande komen de volgende punten naar voren, die als leidraad kunnen dienen bij het les geven in wiskunde in de brugklas (en verder):

a Een algemene heuristiek voor het oplossen van problemen: *speciale gevallen oplossen*, dan via *systematiseren* komen tot *inzichtelijke generalisatie*, vervolgens *toepassen*. Natuurlijk zijn er veel meer heuristieken te noemen, maar ik wil juist deze accentueren vanwege de belangrijke rol die deze heuristiek in de brugklas kan spelen, vooral via het maken en analyseren van *tabellen*.

b De rollen die *functies* op allerlei plaatsen spelen, met name:

i) als natuurlijk middel voor het beschrijven van generalisaties (met behulp van functie-pijlen en van formules);

ii) bij het zoeken naar oplossingswegen voor problemen, bijvoorbeeld met behulp van samenstellingen en inversen. In het bijzonder denk ik hier aan heuristieken voor het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden. Van deze heb ik er al één genoemd:

Probeer het probleem om te zetten in een vergelijking of ongelijkheid van het type:

'Los op: $?y \in A : \mathrm{f}(y) = a$' of
'Los op: $?y \in A : \mathrm{f}(y) > a$', etc.

en probeer dan f te zien als *samenstelling* van 'eenvoudiger' functies, zodat je stap voor stap van beeld naar volledig origineel kunt werken. Later (ik denk: na de brugklas) kan deze heuristiek nog aangevuld worden: in het geval dat a juist 0 is kan het vaak ook helpen als je f kunt zien als een

produkt van eenvoudiger functies (m.b.v. 'ontbinden in factoren').
Voorbeeld:

$$\ldots \Leftrightarrow \cos^2(3x) - \cos(3x)\sin(\tfrac{1}{3}\pi - x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\cos(3x) \cdot (\cos(3x) - \sin(\tfrac{1}{3}\pi - x)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\cos(3x) = 0 \text{ of } \cos(3x) = \sin(\tfrac{1}{3}\pi - x) \Leftrightarrow \ldots$$

Hiernaast is er nog een belangrijke heuristiek voor het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden: probeer het probleem om te zetten in een vergelijking of ongelijkheid van het type:

'Los op: $?y \in A: f(g(y)) = f(h(y))$' of
'Los op: $?y \in A: f(g(y)) > f(h(y))$'

en gebruik nu je kennis van de functie f

$$f(p) = f(g) \Leftrightarrow p = q \text{ of} \ldots$$
$$f(p) > f(q) \Leftrightarrow \ldots$$

Voorbeeld: Los op: $?x \in \mathbb{R}$: $3^5 \cdot (\frac{1}{3})^{x^2} < (\frac{1}{3})^{4x}$.
Oplossing: voor $x \in \mathbb{R}$: $3^5 \cdot (\frac{1}{3})^{x^2} < (\frac{1}{3})^{4x} \Leftrightarrow$
$(\frac{1}{3})^{x^2-5} < (\frac{1}{3})^{4x} \Leftrightarrow$
$x^2 - 5 > 4x \Leftrightarrow \ldots$

De bovengenoemde heuristieken vormen een leidraad voor het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden in het algemeen, en in het bijzonder van vrijwel alle vergelijkingen en ongelijkheden die in de schoolwiskunde moeten kunnen worden opgelost. In de brugklas kan een begin gemaakt worden met het vormen bij de leerlingen van een besturing door heuristieken van het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden.
Hoe de hier genoemde punten praktisch kunnen werken in lessen voor de brugklas (en dan ook in voor leerlingen begrijpelijke taal) hoop ik u te laten zien in de volgende artikelen:
- Eigenschappen van de rekenoperaties behandelen in de brugklas.
- Variabelen en formules in de brugklas; generaliseren.

Literatuur

1 P. Ya. Galperin: *An experimental study in the formation of mental actions.* (Psychology in the Soviet Union. Ed. B. Simon (transl.) p. 213-225 London 1957).
2 N. F. Talyzina, J. V. Jakovlev: *Verschillende typen van oriëntering bij het leren van elementaire onderdelen van het schaken.* (vertaald in: C. F. van Parreren, J. A. M. Carpay: *Soviet Psychologen aan het woord,* Wolters Noordhoff, Groningen 1972).

***Over de auteur*:**

Ernic Kamerich studeerde wis- en natuurkunde aan de Kath. Universiteit te Nijmegen en is daar in 1977 gepromoveerd. Hij is sinds 1972 leraar wiskunde aan het Pax Christi College te Druten en vanaf 1977 tevens werkzaam bij de opleiding van wiskundeleraren aan de Kath. Universiteit te Nijmegen.

Rekenen met oneindig?

P. W. H. LEMMENS

Gaarne wil ik reageren op het artikel van H. Broekman in Euclides *58* (1). Het gaat daar om de uitdrukkingen $\infty - \infty$ en $0 \cdot \infty$, waarvoor hij zoekt naar mogelijkheden om te illustreren dat beide uitdrukkingen niet gedefinieerd zijn. De voorbeelden die ten tonele gevoerd worden hebben inderdaad veel interessante kanten, en ik ben het met Broekman eens dat visuele ondersteuning heel nuttig kan zijn.
Waar ik in deze reaktie de aandacht op wil vestigen, is een tweetal beweringen in (1) die geabstraheerd luiden:

Als $\lim f(x) = 0$, $\lim h(x) = \infty$ en $\lim g(x) = \infty$
dan is $\lim (h(x) - g(x))$ een benadering van de vorm $\infty - \infty$
en $\lim f(x) \cdot g(x)$ een benadering van de vorm $0 \cdot \infty$.

Zo zonder meer komt dit op mij over alsof bij voorbaat vaststaat dat de splitsingsstellingen voor eigenlijke limieten ook gelden voor oneigenlijke limieten, en dat $0 \cdot \infty$ en $\infty - \infty$ van alles kunnen zijn. Daartegenover zou ik willen stellen dat elke eventuele bewerking met ∞ apart gedefinieerd moet worden, omdat ∞ geen element van $\mathbb{R}$ is. Hier ligt naar mijn mening de wezenlijke moeilijkheid rond het symbool ∞.

De leerling is (daarbij in de verleiding gebracht door andere letters en tekens?) geneigd ∞ te interpreteren als een entiteit. Zoals Broekman dat voordoet moet ∞ in de opvatting van de leerling dan ook gehoorzamen aan de wetten van de reële getallen ($\mathbb{R}$ bevat toch alles!?)

$$0 \cdot \infty = 0 \quad \infty - \infty = 0 \quad \frac{\infty}{\infty} = 1$$

Ik denk bijgevolg dat het onze taak is om de leerling te helpen bij een goede beeldvorming over ∞.

Fundamenteel is dat ∞ geen getal voorstelt, dat het een *gedrag* aanduidt en in eerste instantie geen entiteit. Het moet een vanzelfsprekende zaak worden dat met het symbool ∞ eigenlijk niet gerekend kan worden omdat het geen getal voorstelt.

Naar mijn idee ware het dan ook beter om helemaal niet met ∞ te rekenen en ook geen schrijfwijze als $\lim f(x) = \infty$ te gebruiken, maar uitsluitend de notatie $\to \infty$ toe te laten; bijvoorbeeld

Als $x \to \infty$ dan $f(x) \to \infty$.

De notatie $\to \infty$ geeft dan inderdaad een gedrag, een aktie aan. Daarmee plaatsen we ons echter in een ivoren toren, en negeren we de wereld van gebruikers om ons heen.
G. H. Hardy zegt er het volgende over op blz. 117 van (3):

> ... the reader will always have to bear in mind
> 1 that ∞ *by itself* means nothing, although *phrases containing it* sometimes mean something
> 2 that in every case in which a phrase containing the symbol ∞ means something it will do so simply because we have previously attached a meaning to this particular phrase by means of a special definition.

R. Courant geeft de volgende waarschuwing op blz. 33 van (2):

> ..., as we must explicitly emphasize, *the symbol ∞ does not denote a number with which we can calculate as with any other number*; equations or statements which express that a quantity is or becomes infinite never have the same sense as an equation between definite quantities. In spite of this, such modes of expression and the use of the symbol ∞ are extremely convenient, ...

In verschillende leerboeken vinden we een beperkte lijst van rekenregels voor ∞. Toepassing hiervan heeft tot gevolg dat splitsingsregels voor eigenlijke limieten in sommige gevallen ook gelden voor oneigenlijke limieten. Zo'n lijst van rekenregels is niets meer dan een opsomming van zeer speciale afspraken. Met het oog op splitsingsstellingen voor limieten maar ook om andere redenen (zie verderop) is het onverstandig om $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ en $\frac{\infty}{\infty}$ te definieren. Dat is echter heel wat anders dan met behulp van limieten *aan te tonen* dat deze uitdrukkingen onbepaald zijn.

Dat het ongebreideld rekenen met ∞ tot gekke resultaten kan leiden wordt bijvoorbeeld geillustreerd door de volgende kadertjes:
a $\infty + \infty = \infty$, dus $\infty = 0$ via de schrapwet, of $\infty = \infty - \infty$
b $2 \cdot \infty = \infty$ en $4 \cdot \infty = \infty$, dus $2 \cdot \infty = 4 \cdot \infty$; hieruit kan dan weer volgen $2 = 4$ met de schrapwet, of
$0 \cdot \infty = 2 \cdot \infty = \infty$ door van beide kanten met de distributieve wet $2 \cdot \infty$ af te trekken, of
$0 = 2 \cdot \infty$ door van beide kanten $2 \cdot \infty$ af te trekken en alleen rechts distributiviteit te gebruiken
c $2 \cdot \infty = \infty$, dus $2 = 1$ of $2 = \frac{\infty}{\infty}$

d $2 + \infty = \infty$ met als mogelijke gevolgen $2 = 0$ of $2 = \infty - \infty$

e $\frac{3}{\infty} = 0$, dus $0 \cdot \infty = 3$

Van prof. F. van der Blij kreeg ik de volgende suggestie:

> Het is niet zinvol om $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ en $\frac{\infty}{\infty}$ te definieren omdat de vergelijkingen $x + \infty = \infty$, $\frac{x}{\infty} = 0$ en $x \cdot \infty = \infty$ geen eenduidig bepaalde oplossingen x hebben.

Noten

1 H. Broekman, *Oneindig min oneindig en nul maal oneindig*, Euclides, **58** (1982/1983), p. 342-344.
2 R. Courant, *Differential & Integral Calculus*, Volume I, second edition London etc. 1961.
3 G. H. Hardy, *A course of Pure Mathematics*, 10[th] edition, Cambridge 1952.

Naschrift

Terecht wijst Lemmens erop dat ik in het door hem genoemde artikel wil aangeven dat het niet zinvol is te spreken over $\infty - \infty$ en $0 \cdot \infty$, maar het vervolgens wel doe.
Daarmee sluit ik aan bij de vaak slordige en foutieve praktijk van het rekenen met ∞, waarbij de intuïtie veelal een grotere rol speelt dan het formele redeneren.*)
In mijn artikel probeer ik bij die intuïtieve ingang aan te sluiten door de *visualisering*. Het gaat mij daarbij om het aanvoelbaar maken, waardoor de erbij behorende formele redenering ondersteund wordt.
Ik kies voor het laten zien van het onbepaald zijn van een aantal vormen, maar had ook kunnen kiezen voor het laten zien van het ten onrechte toegepast zijn van de splitsingsstelling.
De suggestie van Lemmens om helemaal niet met ∞ te rekenen spreekt mij wel aan.**)

H. Broekman

*) Zie voor een poging tot combineren van het intuïtieve aanvoelen en het formele redeneren het artikel 'Hoe oneindig en hoe nul?' van Herman Paulussen in Wiskunde en Onderwijs 9e jrg. nr. 34 (pag. 207-211).

**) Het bepalen van horizontale en vertikale asymptoten etc. kan ook via intuïtieve weg, zoals in het Hewet-pakket 'Functies en grafieken' pag. 37 e.v. Een ander voorbeeld is te vinden op pag. 29 van de Nieuwe Wiskrant 2e jrg. nr. 3.

HEWET experiment aan het Heymans-college te Groningen

C. H. G. HEGEMAN, J. V. JANSEN EN M. VAN STEENIS

De aanvraag voor het experiment

Begin 1970 verscheen het interimrapport van de werkgroep van advies voor de herverkaveling van de wiskunde I en II (HEWET). Dit rapport werd door de leden van onze wiskundesectie met instemming gelezen. Wij vonden ook dat het wiskunde I-programma te hoog greep voor vele leerlingen, die later geen exacte of technische studierichting willen volgen. Toch is wiskunde I voor vele studierichtingen vereist. Bovendien nam een aantal leerlingen geen wiskunde in het pakket in verband met de moeilijkheidsgraad van wiskunde I. Voor ons was het eveneens onbevredigend dat wiskunde II voor geen enkele studierichting vereist is, waardoor er mogelijk te weinig belangstelling voor bestaat. Verder sprak ons de invoering van computergebruik erg aan.
Hoewel we aardig ingespeeld raakten op het in 1974 gestarte nieuwe eindexamen wiskunde, golden de genoemde overwegingen bij ons zo sterk, dat wij graag wilden meewerken aan de zogenaamde herverkaveling. Na toestemming van de schoolleiding, hebben we reeds in een vroeg stadium een verzoek ingediend om als een van de tien experimenteerscholen in aanmerking te komen. Midden 1981 kregen we bericht dat de werkgroep van advies voor de herverkaveling de staatssecretaris zou aanbevelen om onze school in augustus 1983 te laten starten met het experiment wiskunde A en B in klas 5 van het vwo.

Voorbereiding voor klas 4

Het bericht van midden 1981 betekende dat wij in eerste instantie voorbereidingen moesten treffen voor het wiskundeprogramma in klas 4 van het vwo voor het cursusjaar 1982/1983. Drie leraren namen de taak hiervoor op zich. De voorbereidingen werden voor een groot deel ondersteund door een vijftal middagbijeenkomsten van de betrokkenen van de tien aanbevolen experimenteerscholen en van de twee scholen (te Zevenaar en te Haarlem), die in augustus 1981 reeds gestart waren met het wiskunde A-programma in klas 5. De bijeenkomsten vonden plaats in het instituut van de vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum ('OW & OC') van de Rijksuniversiteit te Utrecht. De leiding berustte bij M. Kindt en J. de Lange Jzn. Getracht werd tot een eensluidend programma voor klas 4 vwo te komen. Het

betekende dat er één wiskundeprogramma voor de 4e klas kwam, ongeacht een splitsing in vwo 4A en 4B en dat, afhankelijk van de mogelijkheden op iedere school afzonderlijk, hiervoor drie, maar liefst vier, lesuren gebruikt moesten worden.
Op het Heymans-college werd voordien drie uur wiskunde I in 4A en 4B gegeven en naar keuze twee uur wiskunde II of aardrijkskunde in 4B. In augustus 1982 kregen wij vier uur wiskunde in zowel 4A als 4B (het onderscheid tussen 4A en 4B bestond toen uit het volgen van respectievelijk economie II of natuurkunde). Dit werd bij ons op een zodanig tijdstip beslist, dat de leerlingen uit 3 vwo een duidelijke keus voor de 4e klas konden maken.
In Utrecht werd ook een voorstel voor het programma voor klas 4 opgesteld. Dit omvatte de volgende onderwerpen:

Functies en Grafieken (tot en met eenvoudige gebroken, wortel- en goniometrische functies, inclusief vergelijkingen en ongelijkheden),
Inleiding Differentiëren,
Exponenten en Logaritmen,
Kansrekening
en indien mogelijk
Drie Dimensionaal Coördinatenstelsel, Rijen of Beschrijvende Statistiek.

Op de bijeenkomsten in Utrecht maakten we tevens kennis met de door het 'OW & OC' ontwikkelde lesdeeltjes voor de 4e klas stof, geschreven door M. Kindt en J. de Lange Jzn. We werden hierbij geconfronteerd met een geheel andere wijze van behandeling dan we gewend waren. De stof is veel meer gebaseerd op de belevingswereld van de leerling en wordt aangeboden in een vorm, waarmee de leerling zelf of in overleg tot mathematiseren moet komen.
Een voorbeeld hiervan is het vinden van de getallen in de driehoek van Pascal n.l.:
op hoeveel manieren kan men vanuit de oorsprong langs roosterlijnen, zonder omwegen, in een ander roosterpunt komen?

0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	6	10	15	21	28	36	
1	4	10	20	35	56	84		
1	5	15	35	70	126			
1	6	21	56	126				
1	7	28	84					
1	8	36						
1	9							

Om de leerlingen niet plotseling met een geheel nieuwe lesmethode te confronteren en ook in verband met het bestaande schoolboekenfonds, besloten we tot een geleidelijke verandering. Hierbij zou het tot dan gebruikte leerboek 'Sigma 4V' gedeeltelijk worden toegepast, aangevuld met eigen diktaat. Daarnaast werden drie deeltjes van het 'OW & OC' voor de leerlingen aangeschaft.

Uitvoering in klas 4

In klas 4 werd begonnen met 'Functies en Grafieken', 'Inleiding Differentiëren' en 'Goniometrie' volgens eigen diktaat en gedeeltelijk uit het voordien gebruikte leerboek 'Sigma 4V' en wel zo dat de behandelde stof overeenkwam met het voorgestelde programma.
Omstreeks de jaarwisseling startten we met de deeltjes van het 'OW & OC', namelijk achtereenvolgens 'Exponenten en Logaritmen' en 'Kansrekening'. Voor de klas 4B was het mogelijk ook nog het deeltje 'Funkties van 2 Variabelen' te behandelen en 'Beschrijvende Statistiek' volgens 'Moderne Wiskunde voor HAVO deel 8' te doen.
Tijdens dit cursusjaar hadden wij met de '10 + 2' scholen totaal zestien middagbijeenkomsten in Utrecht op een geplande roostervrije middag. Een klein gedeelte van deze bijeenkomsten werd gebruikt om de ervaringen in klas 4 te bespreken. Enkele van deze ervaringen zijn:

- de leerlingen moeten wennen aan deze nieuwe wijze waarop wiskunde wordt gegeven,
- zij ontvangen minder uitleg vooraf, maar moeten zelf tekst lezen en daarna met wiskundig redeneren vragen beantwoorden,
- de leerlingen ervaren, dat het noodzakelijk is om de leerstof goed en geconcentreerd door te nemen, anders ontstaan hiaten, die moeilijk in korte tijd zijn in te halen,
- als leraar moet je zorgen, dat de leerlingen tijdens een groot deel van de les alleen of samen met klasgenoten zelfstandig met de leerstof bezig zijn,
- een goede controle van en discussie over de gevonden antwoorden is noodzakelijk,
- het vinden van geschikte vragen voor proefwerken kost veel tijd en inspanning,
- de geleidelijke overgang van de min of meer gebruikelijke methode naar de nieuwe, zoals bij ons op het Heymans-college, was voor leerlingen en leraren een goede oplossing.

Enige ervaringen in klas 4 zijn ook te vinden in de 'Nieuwe Wiskrant, 2e jaargang nr. 3'.
Een indicatie voor het succes van de herverkaveling is het aantal leerlingen dat bij de 12 experimenteerscholen wiskunde in de bovenbouw vwo kiest; ongeveer 90% wiskunde A of wiskunde B, waarvan het aantal met alleen wiskunde A iets groter is dan het aantal met alleen wiskunde B en waarvan ongeveer een kwart wiskunde A en B.

Voorbereidingen voor klas 5

Zoals reeds genoemd zijn wij in het cursusjaar 1982/1983 zestien middagen bijeen geweest in Utrecht. Hier werden essentiële delen van de nieuwe leerboekjes voor de bovenbouw door de leraren doorgewerkt en bediscussieerd. Wij maakten toepassingen van 'Automatische Gegevensverwerking' mee en hoorden van ervaringen van de twee scholen, die al voor het tweede jaar met wiskunde A in de

Inleiding Automatische Gegevensverwerking		
I	II	
Matrices Periodieke Funkties Differentiëren 2 Funkties van 2 Variabelen	Grafische Verwerking Kansrekening Kansverdelingen Toetsen	klas 5
Groei Lineair Programmeren Differentiëren 3	Toetsen (vervolg) Normale Verdeling	klas 6

Tabel 1

bovenbouw bezig waren of zagen hiervan videobeelden. Bovendien kregen we enig inzicht in de functie van het wiskunde A-programma en in enkele gevallen een uitdieping van de leerstof. Wiskunde B zal bestaan uit de wiskunde I stof zonder 'Mathematische Statistiek' maar met 'Ruimtemeetkunde'; alleen aan het nieuwe onderdeel werd aandacht besteed.
Besloten werd om op de experimenteerscholen geen wiskunde I en II in klas 5 meer te geven en daarvoor in de plaats wiskunde A en B. De faculteiten van de universiteiten en de hogescholen maakten hun toelatingseisen bekend omtrent de nog niet wettelijk erkende wiskundevakken. Voor de HBO-opleidingen lag dit moeilijker, omdat iedere HBO-school afzonderlijk zijn eisen kan stellen. Tenslotte stelden we een tijdschema op voor de behandeling van de onderwerpen van wiskunde A in de bovenbouw (zie tabel 1).
Opmerkingen bij de tabel:
- 'Automatische Gegevensverwerking' wordt toegepast bij verschillende onderwerpen, zoals 'Matrices' en 'Lineair Programmeren', daarom is het zinvol deze inleiding aan het begin te doen,
- de totale stof in kolom II vergt ongeveer 1/3 van de gehele tijd,
- de onderwerpen naast elkaar in kolom I en II kunnen door een verdeling van de wekelijkse lesuren gelijktijdig gegeven worden, maar ook op elkaar aansluitend,

- globaal genomen omvat wiskunde A zes onderwerpen:
  Automatische Gegevensverwerking,
  Matrices,
  Grafische Verwerking,
  Analyse (Periodieke Funkties, Differentiëren, Groei (Exponenten en Logaritmen)),
  Kansrekening en Statistiek,
  Lineair Programmeren met als inleiding 'Funkties van 2 Variabelen'.

HEWET en de onderbouw

De gevolgen van de HEWET voor de onderbouw zijn op de bijeenkomsten in Utrecht nauwelijks ter sprake geweest.
Wij, van het Heymans-college, hebben wel enkele voorlopige conclusies getrokken: de basisstof blijft nodig om wiskunde A te kunnen volgen en om te selecteren voor wiskunde B; in een aantal onderdelen zal uitdieping van de stof vervangen worden door praktische toepassingen van de wiskunde. De mogelijkheden hiertoe zijn echter beperkt.

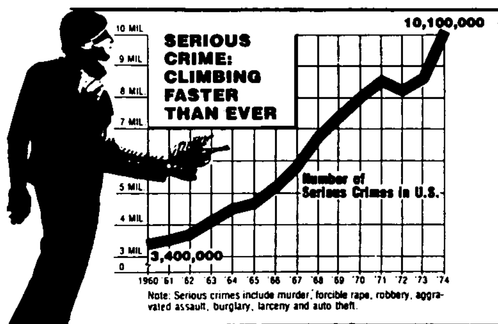
Slotindrukken

Met de invoering van de Mammoetwet heeft het wiskundeprogramma voor het vwo een grondige wijziging ondergaan. De veranderingen door de HEWET hebben al betrekkelijk kort hierna plaats. De in het begin genoemde onbevredigende gang van zaken met wiskunde I en II is hiervan de oorzaak.
Wij hebben de stellige indruk, dat de herverkaveling in wiskunde A en B beter is afgestemd op de capaciteiten van de leerlingen en de behoeften, die de (academische) vervolgopleidingen stellen. Met name wiskunde A geeft de leerlingen oefening in het toepassen van wiskunde op een groot aantal gebieden. Bovendien zullen meer leerlingen in staat zijn om één of twee wiskundevakken in hun pakket op te nemen. De wiskundige voorbereiding voor exacte en technische studierichtigen blijft min of meer gehandhaafd in de vorm van wiskunde B, waarin 'Ruimtemeetkunde' weliswaar wiskunde II maar voor een klein gedeelte vervangt. Op de laatste middagbijeenkomst in Utrecht, eind mei 1983, was een forum van vier leerlingen uit klas 5 en van vier leerlingen, die juist het eindexamen wiskunde A hadden afgelegd, afkomstig van de eerste twee experimenteerscholen, aanwezig. Dit forum bevestigde onze indrukken dat leerlingen eerder wiskunde A dan wiskunde I gaan volgen, dat wiskunde A met voldoende inspanning en belangstelling voor velen een haalbare zaak is en dat het nieuwe programma de leerlingen aanspreekt.
De HEWET zal van de wiskundeleraren veel energie vragen, maar dat lijkt ons zeker de moeite waard.

VWO-Eindexamen Wiskunde A tweede tijdvak

N.B. Van de kandidaat wordt gevraagd elk antwoord te motiveren.

Opgave 1



Hierboven een grafiek uit het tijdschrift 'U.S. News and World Report' van 7 april 1975.
De Engelse tekst erbij, vrij vertaald, luidt:
'Ernstige misdaden nemen sneller toe dan ooit.'

Ga er bij de beantwoording van de volgende vragen vanuit dat je de aantallen misdaden kunt aflezen uit de grafiek, door het midden van de dikke lijn te nemen.

max.
ptn

2 a. Hoe kun je aan de grafiek zien dat het aantal misdaden in het laatste jaar van de periode 1960-'74 inderdaad sneller is gestegen dan ooit tevoren in die periode?

3 b. In een ander tijdschrift stond een grafiek van het aantal misdaden in de V.S. afgebeeld met 'drie jaar' i.p.v. 'één jaar' als klassebreedte en met de meetpunten in 1962, '65, '68, '71 en '74.
Wekt de grafiek in dat tijdschrift ook de indruk van een versnelde stijging van het aantal misdaden aan het eind van de periode 1960-'74?

5 c. Een statisticus beschrijft het aantal misdaden in de V.S., afhankelijk van de tijd, met de formule:

$$M = 0{,}5T + 3$$

(M is het aantal misdaden in miljoenen, T is de tijd in jaren na 1960). In welke jaren geeft de formule hetzelfde aantal misdaden (met een toegestane afwijking van 200.000) als in de grafiek van 'U.S. News and World Report' wordt aangegeven?

6 d. De bevolkingsgroei in de periode 1960-'74 in de V.S. wordt benaderd met de formule:

$A = 2T + 180$

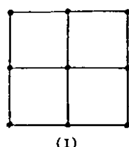
(A is het aantal inwoners van de V.S. in miljoenen, T is de tijd in jaren na 1960).

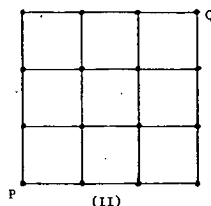
Teken, uitgaande van deze formule en de formule genoemd in c, de grafiek van het relatieve aantal misdaden t.o.v. het inwonertal (in procenten) als functie van de tijd.

2 e. In welk opzicht geeft de onder d bedoelde grafiek (van het relatieve aantal misdaden) een betere voorstelling van zaken dan de grafiek in 'U.S. News and World Report'?

Opgave 2

Gegeven zijn de wegennetten I en II:


(I)



(II)

max.
ptn.

4 a. Welke van de twee wegennetten heeft de hoogste graad van verbondenheid?

C is de verbindingsmatrix van I.

3 b. Beredeneer wat het grootste getal van C^2 is, zonder C en/of C^2 uit te schrijven.

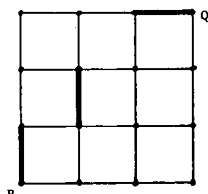
3 c. Verklaar waarom er nullen voorkomen in C^4.

D is de verbindingsmatrix van II.

4 d. Het punt P in wegennet II correspondeert met de eerste rij en de eerste kolom van de matrix D; het punt Q correspondeert met de laatste rij en de laaste kolom van de matrix D.

Bereken het getal dat op de eerste rij en de laatste kolom van D^6 staat.

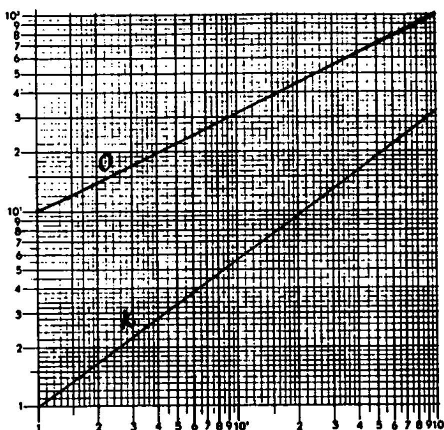
4 e. De vetgetekende verbindingswegen in onderstaande figuur zijn niet begaanbaar.



Iemand gaat van P naar Q en weer terug naar P en maakt daarbij gebruik van 12 verbindingswegen. Voor de terugweg kiest hij niet precies dezelfde route als voor de heenweg.
Uit hoeveel verschillende routes P-Q-P heeft hij de keus?

Opgave 3

Opbrengst (= O) en kosten (= K) van een bepaald produkt zijn functies van de geproduceerde hoeveeheid (= q).
Op dubbellogaritmisch papier zijn de grafieken van O en K als functies van q getekend.
Neem aan dat die grafieken zich rechtlijnig voortzetten en elkaar ontmoeten in het punt (10000, 1000).



max.
ptn.

4 a. Beschrijf O en K als functies van q met behulp van een formule.

6 b. Teken op millimeterpapier de grafieken van O en K voor $0 \leqq q \leqq 10000$ in een assenstelsel met 'gewone' schaalverdeling langs de assen. (Neem de eenheid op de verticale as tien keer zo groot als op de horizontale).

5 c. Bereken voor welke q de winst W maximaal is; $W = O - K$.

3 d. Welke van de twee grafische voorstellingen, die met logaritmische schaalverdeling, resp. lineaire schaalverdeling, leent zich het best voor het aflezen van de maximale winst?

Opgave 4

Een wijnkenner beweert dat hij verschillende wijnjaren van de wijnsoort Médoc kan onderscheiden.

max.
ptn.

5 a. Er worden hem 10 glazen wijn voorgezet: 6 gevuld met Médoc 1975 en 4 met Médoc 1970. De glazen staan in willekeurige volgorde en de wijnkenner is gedurende de gehele proef geblinddoekt. Het enige dat hij weet is dat er 6 glazen van de eerste soort en 4 van de tweede zijn ingeschonken.
Veronderstel dat de wijnkenner een bluffer is en slechts raadt naar het wijnjaar.
Hoe groot is de kans dat hij tien keer het goede wijnjaar noemt?

4 b. Nu worden de tien glazen stuk voor stuk 'ad random' met een van de twee wijnsoorten gevuld. (Er wordt steeds een geldstuk geworpen; bij 'kop' schenkt men 1975 in, anders 1970).
Neem opnieuw aan dat de wijnkenner alleen maar raadt.
Hoe groot is de kans dat hij tien keer het goede jaar noemt?

4 c. De wijnkenner zwakt zijn bewering af en zegt dat hij weliswaar niet met zekerheid kan vaststellen met welk wijnjaar hij te doen heeft, maar dat hij vaker goed dan fout kiest.
Hij krijgt opnieuw tien glazen wijn voorgezet, stuk voor stuk ad random gevuld en noemt achtmaal het goede jaar.
Is er op grond van deze uitslag reden genoeg om hem te geloven bij een significantieniveau van 5%?

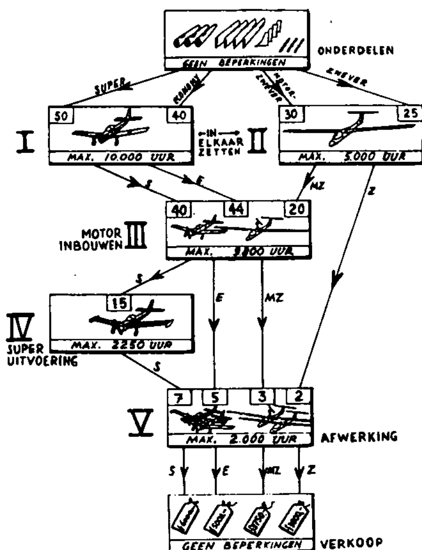
5 d. Een week later voert men opnieuw deze toets uit, maar nu met een ander aantal glazen (ad random met één van beide wijnsoorten gevuld). Bij een significantieniveau van 5% wordt de wijnkenner slechts geloofd als hij ten hoogste één keer een verkeerd jaar noemt. Hoeveel glazen krijgt hij tenminste voorgezet?

Opgave 5

Een bedrijf maakt vier modellen vliegtuigjes. Er worden twee uitvoeringen van een sportvliegtuig gemaakt: de Super en de Economy.
Daarnaast worden er twee versies gemaakt van een zweefvliegtuig: één echt zweefvliegtuig: de Zwever, en één met hulpmotor: de Motorzwever.

Het schema voor de produktie staat op de volgende bladzijde. Daaruit blijkt o.a. dat er naast het onderdelenmagazijn 5 produktiehallen zijn die alle een maximale capaciteit hebben.
Zo heeft hal I een produktiecapaciteit van 10.000 uur.
De produktietijden per model per hal staan ook in het schema vermeld: bijv. het in elkaar zetten van een 'Super' in hal I duurt 50 uur en het in elkaar zetten van een 'Economy' 40 uur.
Tenslotte is ook de winst af te lezen uit het schema: bij de 'verkoop' blijkt de winst op een 'Super' ƒ6.000,– te bedragen.

6 a. Stel een simplex-tableau op voor de berekening van de maximale winst. (Je hoeft de berekening zelf niet uit te voeren.)



VERKLARING

SUPER

50 Betekent: er is in deze fase een produktietijd van 50 uur voor het toestel SUPER.

S Betekent: winst per vliegtuig van het model SUPER is ƒ 6.000,--.

De berekening wordt door de computer uitgevoerd. De laatste drie tableaus die de computer levert zien er als volgt uit:

(1e kolom: Super 2e kolom: Economy
3e kolom: Motorzwever 4e kolom: Zwever).

HET SIMPLEXTABLEAU ZIET ER ZO UIT:

0.00	1.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	-0.08	0.00	62.50
0.00	0.00	0.00	25.00	1.65	1.00	-1.50	-1.50	0.00	3425.00
0.00	0.00	1.00	0.00	-0.06	0.00	0.05	0.05	0.00	52.50
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.00	150.00
0.00	0.00	0.00	2.00	0.04	0.00	-0.15	-0.20	1.00	480.00
0.00	0.00	0.00	3.00	0.08	0.00	-0.19	-0.17	0.00	-1409.38

DE WAARDE VAN DE DOELFUNCTIE IS 1409.38

HET SIMPLEXTABLEAU ZIET ER ZO UIT:

0.00	1.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	-0.08	0.00	62.50
0.00	0.00	0.00	1.00	0.07	0.04	-0.06	-0.06	0.00	137.00
0.00	0.00	1.00	0.00	-0.06	0.00	0.05	0.05	0.00	52.50
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.00	150.00
0.00	0.00	0.00	0.00	-0.09	-0.08	-0.03	-0.08	1.00	206.00
0.00	0.00	0.00	0.00	-0.12	-0.12	0.00	0.00	0.00	-1820.38

DE WAARDE VAN DE DOELFUNCTIE IS 1820.38

HET SIMPLEXTABLEAU ZIET ER ZO UIT:

0.00	1.00	1.67	0.00	-0.07	0.00	0.08	0.00	0.00	150.00
0.00	0.00	1.20	1.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	200.00
0.00	0.00	20.00	0.00	-1.10	0.00	1.00	1.00	0.00	1050.00
1.00	0.00	-1.33	0.00	0.07	0.00	-0.07	0.00	0.00	80.00
0.00	0.00	1.60	0.00	-0.18	-0.08	0.05	0.00	1.00	290.00
0.00	0.00	-0.18	0.00	-0.11	-0.12	-0.02	0.00	0.00	-1830.00

DE WAARDE VAN DE DOELFUNCTIE IS 1830.00

DE OPTIMALE OPLOSSING IS NU GEVONDEN

Aan de hand van deze tableaus moeten de directeuren een beslissing nemen over de te produceren aantallen toestellen.
De ene directeur (A) wil per sé het produktieschema uitvoeren dat tot maximale winst leidt.
De ander directeur (B) oppert de mogelijkheid om te produceren volgens het middelste tableau: de winst is wat minder, maar *alle vier* modellen worden geproduceerd.

6 b. Bepaal aan de hand van de simplex-tableaus hoeveel stuks er van ieder model gemaakt moeten worden, als directeur (A) zijn zin krijgt en hoeveel als directeur (B) zijn zin krijgt.

6 c. Bepaal bij ieder van de onder b genoemde produktiemogelijkheden de *gemiddelde* winst per vliegtuig.

Jaarrede 1983

Dames en Heren,

Hoewel we leven in een tijd van economische recessie en we dagelijks te horen krijgen dat de tijd van leuke dingen voor de mensen voorbij is, sta ik toch niet geheel met lege handen voor u.

Als eerste vermeld ik het Hewet-project. Dit project heeft in het afgelopen schooljaar een belangrijke stap voorwaarts gedaan. Aan de experimenteerscholen, de Lorentz scholengemeenschap in Haarlem en het Liemers College in Zevenaar werd het eerste examen wiskunde A afgenomen. De examenopgaven, die via de Nieuwe Wiskrant openbaar gemaakt zijn en ook in Euclides zijn verschenen, ademen inderdaad de geest die ons in het Hewetrapport werd voorgespiegeld. Prognosen over energieverbruik, bevolkingsopbouw van een diersoort, voorraadkosten van een verffabriek, keuring van kosmonauten en een transportprobleem voor een oliemaatschappij; het klinkt inderdaad heel anders dan een examen wiskunde 1 of 2. De kandidaten vonden dat ook en reageerden positief door heel behoorlijk werk af te leveren. Dit schooljaar is de Hewet de tweede fase ingegaan nu er tien nieuwe scholen gestart zijn met wiskunde A in de vijfde klas en met wiskunde B, waarbij voor het eerst het vak ruimtemeetkunde in het experiment is opgenomen.
Het is duidelijk dat de wiskunde A zo anders is, dat het zeer aan te bevelen is dat elke wiskundeleraar die het vak in de toekomst zal gaan geven gebruik maakt van de hem of haar geboden gelegenheid tot nascholing. Dit jaar zijn er nascholingscursussen in Haarlem, Delft, Utrecht, Zwolle, Heerenveen en Eindhoven, in hoofdzaak bestemd voor de leraren van de 40 volgscholen die in 1984/1985 met wiskunde A beginnen. Het ligt in de bedoeling dat er in het volgende schooljaar 32 cursussen gaan draaien, verdeeld over maximaal 16 plaatsen in Nederland. Het Hewetteam heeft het voornemen het komende voorjaar op tournee te gaan en een aantal informatiebijeenkomsten te organiseren in den lande, bestemd voor

scholen die niet aan de experimenten hebben meegedaan.
Inmiddels heeft de staatssecretaris, mevrouw Ginjaar-Maas, positief gereageerd op het verzoek van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren om een werkgroep in te stellen die het havo-examenprogramma in studie zal nemen. Als voorzitter, respectievelijk secretaris van deze commissie zijn benoemd de heren Wim Kleyne en Henk Schuring. Namens onze vereniging zullen Nelly Verhoef en Wim Kremers aan het werk gaan, terwijl prof. Van der Blij en Martin Kindt de verbinding met Hewet zullen bewaken. In de commissie zijn verder nog diverse andere organisaties, zoals HBO, AVS en NGL vertegenwoordigd.
De commissie krijgt als opdracht de voorbereiding van een wijziging van het eindexamenprogramma wiskunde havo en van de in verband daarmee wenselijke wijziging van het leerplan wiskunde van de rijksscholen voor havo. Zij moet daarbij rekening houden met de eisen, die het hoger beroepsonderwijs en het bedrijfsleven stellen. Tevens dient in verband met de doorstroming van havo-abituriënten naar het vwo de werkgroep kennis te nemen van de nieuwe eindexamenprogramma's vwo voor wiskunde A en B. Bovendien moet de werkgroep – in het kader van het onderwijsemancipatiebeleid – aandacht schenken aan de wenselijkheid dat het vak wiskunde in de toekomst meer dan thans door meisjes wordt gevolgd.
Zoals u allen ongetwijfeld weet laat de Adviesraad Voortgezet Onderwijs Tweede Fase – kortweg ARVO-II – de laatste tijd veel van zich horen. Deze adviesraad werkt momenteel aan een advies „Rendementsverbetering havo door integratie havo-vwo". Uit het conceptadvies ontleen ik het volgende: Zowel van havo als van vwo verdwijnt de bovenbouw als afzonderlijke, zelfstandige eenheid. Daarvoor in de plaats komt een driejarige opleiding met vakken op eerste (= vwo) en tweede (= havo) niveau. De school biedt leerlingen de mogelijkheid om op grond van hun belangstelling en capaciteiten een vakkenpakket met een eventueel per vak verschillend studieniveau samen te stellen. De programma's worden ingedeeld in een aantal naar leerstof en tijd precies omschreven leer- en studiekavels. Voor iedere kavel behaalt de leerling studiepunten. Een succesvolle schoolafsluiting van een vak (op niveau-1 of -2) wordt bevestigd en vastgelegd in een half-certificaat. Het centraal schriftelijk examen maakt zo'n halfcertificaat volledig.
Om de voorstellen zoveel mogelijk te toetsen aan de ervaring en deskundigheid die er in de praktijk zijn, heeft de adviesraad enkele consultatierondes gevolgd. Bovendien wil de adviesraad graag vakdocenten raadplegen. Hiertoe zijn docenten van ongeveer tachtig scholen uitgenodigd. Voor deze bijeenkomst zullen ook vertegenwoordigers van onze vereniging worden uitgenodigd. Ons bestuur zal de uitnodiging gaarne aanvaarden.

Het is nu definitief bekend dat bij het lbo en het mavo alle eindexamenvakken, dus ook wiskunde, in 1986 in één zitting zullen worden afgenomen. Het ministerie heeft het CITO inmiddels opdracht gegeven te bestuderen op welke wijze er in een tijdsbestek van twee uren kan worden geëxamineerd. Haar opdracht houdt in de mogelijkheid te onderzoeken van een objectief scoorbare toets, dat wil zeggen dat de antwoorden in een dergelijke toets machinaal moeten kunnen worden verwerkt. U weet dat het bestuur zich al in een vroeg stadium

heeft gebogen over de problematiek van de wijze van examineren. U weet ook dat de door ons ontwikkelde zienswijze op dit probleem fungeerde als onderwerp voor één van de werkgroepen bij onze vorige jaarvergadering. Daarom volgen wij, nu de deskundigen van het CITO zich met de problematiek gaan bezig houden, de ontwikkelingen met grote belangstelling en hopen dat er voorstellen tot stand komen die weliswaar de toetstechnische kant van het probleem kunnen oplossen, maar die vooral ook onderwijskundig verantwoord zijn, en wij verwachten dat men hierbij ons rapport zal raadplegen.

Ook dit jaar heeft het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde diverse cursussen gegeven. In februari en juni twee aangepaste C-conferenties met als thema 'Oog krijgen voor en rekening houden met individuele verschillen' en twee nieuwe D-conferenties over 'zinvolle wiskunde' in februari en juni. Het werkverband wil proberen dit jaar een E-conferentie te organiseren met betrekking tot rekendidactiek en eventueel gekoppeld aan de BOVO-problematiek.
Inmiddels is besloten dat het Werkverband zich niet meer bezig zal houden met de nascholing informatica; deze nascholing is overgeheveld naar een landelijke coördinatorenoverleg, waar ook niet-wiskundigen aan deelnemen.

De Werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' is inmiddels officieel een onderdeel van onze vereniging geworden en heeft dezelfde status als de reeds bestaande didactiekcommissie. Nieuwe leden van de vereniging zullen derhalve ook automatisch informatie over deze groep 'Vrouwen en Wiskunde' toegestuurd krijgen.
Op 23 april werd de vierde landelijke dag gehouden in Bilthoven. Het thema van die dag was: 'Een speciale didactiek voor meisjes, bestaat dat?'. De dag werd georganiseerd door de subgroep Hewet. Er waren ongeveer 40 vrouwen aanwezig. Thans zijn de volgende subgroepen actief: de reeds genoemde Hewet-werkgroep, de werkgroep schoolboeken en de werkgroep vrouwen en informatica. Een nieuwe werkgroep is in oprichting, de zogenaamde middenschoolgroep. Ook is het plan opgevat om al het materiaal dat de groep in de afgelopen twee jaren verzameld heeft op een overzichtelijke manier te ordenen en in brochurevorm uit te geven. Hiervoor is subsidie aangevraagd bij het ministerie.

In 1981 heeft in het novembernummer van Euclides een oproep gestaan van de didactiekcommissie om deel te nemen aan bepaalde werkgroepen voor uitwisseling van ervaringen, studie en doordenking van de didactiek. Voor de drie werkgroepen, namelijk 'variabelen', 'wiskunde in 3-havo' en 'toepassingen in de onderbouw bij de natuurkunde en rekenvaardigheden hierbij', hebben verscheidene collega's zich opgegeven. De werkgroepen zijn nu bijna twee jaar bezig en de deelnemers hebben prettig met elkaar gewerkt en veel van elkaar geleerd. Het resultaat van het werk van de werkgroep 'wiskunde in 3-havo' is vandaag aan u uitgereikt. De oplossing van het probleem zult u er niet in vinden, maar wel goede handreikingen. De andere twee groepen zijn aan de afronding van hun thema bezig. Ook zij zullen in de een of andere vorm verslag doen van hun bevindingen. Het ligt in de bedoeling van de didactiekcommissie om het komende jaar met één

of twee nieuwe werkgroepen te starten. Nadere mededelingen hierover zullen in Euclides geplaatst worden.

De 'burgerinformatica' doet zijn intrede. De gedachte om de Nederlandse industrie te stimuleren computers te ontwerpen en te fabriceren vanuit onderwijskundige wensen leefde al enkele jaren bij Economische Zaken. De tijd haalde echter de gedachte in en het voor 1983 begrote bedrag wordt nu met spoed omgezet in microcomputers uit de serieproductie. Ruim 800 machines van in werkelijkheid of in naam Nederlands fabricaat worden in 100 scholen binnengedragen. Hoewel de burgerinformatica niet onverwachts komt stelt deze haast het onderwijs en zijn verzorgende instanties voor grote problemen. Laten we echter niet de wat onvoldragen boreling onmiddellijk in kritiek smoren, maar het een levenskans gunnen.
De huidige inhoud van wiskunde A houdt bij voorbeeld al rekening met dit voortbestaan. Veel aspecten van burgerinformatica die in de oorspronkelijke plannen voor wiskunde A voorkwamen zijn daaruit geschrapt. Wel blijft computergebruik een grote rol spelen om het practische gebruik van de wiskunde in practijkgevallen te benadrukken.
Terug naar de burgerinformatica: twee commissies, kortweg met Plomp en Uhlenbeck aangeduid, hebben hun advies uitgebracht. Twee peetvaders die het niet eens zijn over de opvoeding: hard of zacht. Nadruk op maatschappelijke contra nadruk op algoritmische aspecten, informatievoorziening in zijn geheel contra gegevensverwerking met automaten, uitsmeren over veel leergebieden contra opnemen in de wiskunde. Wiskundeleraren die al vele jaren ervaring in het project computerkunde hebben liggen zullen de woordenstrijd met enige verbazing aanhoren. Zij hebben bewezen dat deze tegenstelling onnodig is. Een vleugje programmeren als middel om toepassingen van automatisering te leren kennen om daarmee weer maatschappelijke implicaties bewust te worden. Niet hard, niet zacht, maar stevige kost.

Volgend jaar zal de 'International Commission on Mathematical Instruction' van 24 tot 30 augustus in Adelaide het 'Fifth International Congress on Mathematical Education' houden. Zoals u weet heeft de vereniging bij de vorige bijeenkomsten in Exeter, Karlsruhe en Berkeley een subsidie voor congresgangers beschikbaar gesteld. Gezien de hoge bedragen die aan een reis naar Australië verbonden zijn, lijkt het ons niet verstandig dezelfde procedure als bij vorige congressen te volgen. Zowel een kleine tegemoetkoming in de kosten voor velen als een integrale kostenvergoeding voor één deelnemer is voor ons bestuur niet aanvaardbaar. Het bestuur heeft het voornemen aan enige leden een subsidie toe te kennen die zowel voor het wiskundeonderwijs als voor de congresganger optimaal is.

Ook dit jaar mag ik weer een afscheid vermelden. Inspecteur De Jong heeft met ingang van 1 oktober gebruik gemaakt van de VUT-regeling. Daar er geen opvolger voor hem komt als vakinspecteur wiskunde moet het voor hem een prettige gewaarwording zijn dat nu bewezen is dat hij onvervangbaar is. Wij hopen dan ook dat hij een gedeelte van de vrije tijd, die hij nu ongetwijfeld krijgt,

zal gebruiken om het wiskundeonderwijs te blijven adviseren. Wij hopen hem nog vaak als lid van onze vereniging op onze vergadering te ontmoeten en wensen hem veel geluk in zijn nieuwe levensfase.

Th. J. Korthagen, voorzitter

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 12 november 1983 in het gebouw van de S.O.L. te Utrecht.

Om 10.17 uur opent de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen, de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de ereleden prof. dr. H. Freudenthal en dr. P. G. J. Vredenduin, de inspecteurs J. Boersma, drs. W. E. de Jong en drs. B. J. Westerhof, de gastspreker Alan Bishop, de vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars, F. Laforce, T. Coppens, A. Schoeters en H. Staelens, de vertegenwoordigers van Wolters-Noordhoff, J. de Groot en A. van 't Riet, de vertegenwoordigers van Euclides, F. Dolmans, P. de Roest en mevr. H. Susijn. Hierna spreekt de voorzitter de jaarrede uit.
Na de jaarrede worden de notulen van de algemene vergadering van 30 oktober 1982 en de jaarverslagen goedgekeurd. De penningmeester wordt gedechargeerd. In de nieuwe kascommissie worden gekozen de heren W. P. de Porto en M. J. Verhoef. De heren C. Th. J. Hoogsteder en F. J. Mahieu worden als bestuurslid herkozen. De contributie voor het verenigingsjaar 1984/1985 wordt vastgesteld op *f* 50,–.
Hierna geeft de voorzitter het woord aan de heer J. de Lange, die een inleiding geeft op de studiedag met als thema 'Vak-beweging'. Na deze inleiding kunnen de aanwezigen deelnemen aan één van de volgende werkgroepen: BOVO: verhoudingen op het breukvlak van basisonderwijs en voortgezet onderwijs; voortgezet rekenen; burgerinformatica; heterogene groepen; introductie functies; Hewet, de groei in wiskunde A; Hewet, de ruimte in wiskunde B.
Na deze werkgroepen is er een lunchpauze.
Na de lunch houdt de gastspreker, de heer Alan Bishop uit Cambridge, een lezing over de ontwikkelingen in het onderwijzen van wiskunde. Na deze lezing wordt er weer in werkgroepen gewerkt. Om 16.30 uur volgt het tweede gedeelte van de huishoudelijke vergadering.
In de rondvraag krijgt de heer W. Kremers als eerste het woord. Als leraar, die reeds een klas heeft opgeleid voor het nieuwe examen wiskunde-A, maakt hij bezwaar tegen het artikel over het examen wiskunde-A in het novembernummer van Euclides. Hij oordeelt dat de schrijver niet gekeken heeft naar de manier waarop de leerlingen zijn opgeleid en geen kennis heeft genomen van het materiaal waarmee is gewerkt. Hij vindt het artikel eenzijdig en heeft er vooral bezwaar tegen dat de redactie geen gelegenheid aan het Hewet-team heeft geboden voor een weerwoord. De heer F. Dolmans, hoofdredacteur van Euclides, antwoordt dat Euclides een blad van de vereniging is, waarin alle mededelingen over wiskunde geplaatst kunnen worden. Hierdoor ontstaat een veelheid van artikelen waar niet altijd iedereen het mee eens behoeft te zijn. Het is

niet met opzet dat aan het Hewet-team geen gelegenheid tot weerwoord is gegeven. Spreker hoopt dat anderen op het bewuste artikel reageren zodat een levendige discussie in Euclides kan ontstaan. Hij voegt hier nog aan toe dat er binnen de redactie zeker positief over Hewet gedacht wordt. De heer P. de Roest, de schrijver van het artikel, ziet gevaar dat men ook binnen de Hewet-stof weer snel gaat komen tot het aanleren van maniertjes en vraagt zich af of binnen afzienbare tijd de examenvraagstukken weer voorspelbaar gaan worden. De heer M. Kindt zegt hierop dat deze angst zeker ook bij het Hewet-team leeft. Men moet echter bedenken dat het een eerste examen is over een stof die op dat moment gedaan is. Het tweede-tijdvak examen is geheel anders geweest. Men denkt bovendien aan een centraal keuzeonderwerp in het examen, waardoor de gevarieerdheid kan toenemen. De voorzitter voegt hier nog aan toe dat ook het bestuur het juister had gevonden als het artikel eerst aan het Hewet-team was voorgelegd. De heer H. Broekman denkt dat vele docenten na het examen over de opgaven nadenken en dat één dit op papier heeft gezet. Hij hoopt dat dit tot discussie leidt. Hij is er niet van overtuigd dat leerlingen 'zomaar' iets uit een plaatje kunnen aflezen en zal het bijzonder op prijs stellen als leerlingen dit in het Hewet-programma leren. De heer W. Kremers meent dat niet iedereen die zijn emoties kwijt moet, dit via Euclides moet doen en dat men bij het beoordelen van een examenprogramma niet mag oordelen op grond van 5 vraagstukken.
Naar aanleiding van een brief, die door docenten van experimenterende scholen aan alle nascholingscursussen voor de Hewet is gezonden en de reactie van het bestuur hierop – beide zijn in het februarinummer van Euclides geplaatst – vraagt de heer N. Olofsen het woord. De brief gaat vooral om de keuzebegeleiding. De schrijvers zullen zich neerleggen bij het advies van het bestuur maar dringen er wel erg op aan dat de voorstellen worden uitgevoerd. Hij hoopt dat er een brochure naar alle betrokkenen gaat en er decanen en schoolleiders in de begeleidingscommissie komen. De heer J. van Dormolen erkent het probleem van vroeg kiezen. De begeleidingscommissie wil de adviezen graag overnemen en het bestuur zal sterk op uitvoering aandringen. De heer F. Pach vraagt of er geen tussenoplossing kan zijn waarin de scholen zelf kiezen of ze nog een jaar wachten met de invoering van het Hewet-programma. De heer Van Dormolen zegt dat er in het voorstel over deze tussenoplossing is gesproken. Het is de begeleidingscommissie duidelijk geworden dat dit binnen het ministerie niet haalbaar is.
Mevrouw F. Meester heeft moeite met 'klassestrijd', zoals dit voorkomt op de eerste pagina van de brochure 'Vak-beweging'. Vrouwen willen niet iets voortbrengen door 'strijd', maar door samenwerking. Zij hoopt dat de term 'klassestrijd' niet serieus is. Zij deelt mede dat er een voorstel van de groep 'Vrouwen en Wiskunde' bij het bestuur ligt om de themadag 1984 te verzorgen.
Tenslotte vraagt de heer F. Laforce het woord. Hij feliciteert de vereniging met de geslaagde studiedag en dankt voor de uitnodiging.
Om 16.57 uur sluit de voorzitter de vergadering.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

Opgaven

Onlangs kreeg ik een aardig boekje in handen: Ross Honsberger, *Ingenuity in Mathematics*. Het bestaat uit een aantal hoofdstukken waarin wiskundige problemen behandeld worden die iets leuks hebben. Het boek is eenvoudig geschreven en behoort tot de goede wiskundige ontspanningsliteratuur. Bovendien is het nog goedkoop ook. De uitgever is The Mathematical Association of America, maar het dient hier via John Wiley besteld te worden (bij de boekhandel).
De bedoeling van de auteur is niet de lezer een stel puzzels voor te zetten. Toch wil ik in twee opgaven iets uit de inhoud weergeven.

501. Een driehoek ABC wordt verdeeld in driehoekjes. Geen hoekpunt is inwendig punt van een zijde van een driehoekje. De nieuwe hoekpunten worden willekeurig A, B en C genoemd, met de restrictie dat geen hoekpunt op de zijde AB de naam C krijgt, geen op de zijde AC de naam B en geen op de zijde BC de naam A.
Bewijs dat het aantal driehoekjes met hoekpunten A, B en C oneven is.
Deze opgave komt voor in een hoofdstuk getiteld: Odd and even numbers.

502. Neem een getal van vier cijfers waarvan niet alle cijfers hetzelfde zijn. Vorm hieruit een getal van vier cijfers door de cijfers in afdalende volgorde te rangschikken en een door de cijfers in opklimmende volgorde te rangschikken. Trek het tweede getal van het eerste af. Bijv.
8680 geeft 8860 en 0688; $8860 - 0688 = 8172$
Doe nu hetzelfde met 8172:
8172 geeft 8721 en 1278; $8721 - 1278 = 7443$
Ga zo door. Hoe loopt het af?
Loopt het altijd zo af?

503. Zoals bekend kan een eindige graaf waarin in elk hoekpunt een even aantal lijnstukken samenkomen, in één trek worden doorlopen.
Neem nu alle roostervierkantjes van het platte vlak. Trek in elk vierkantje de diagonalen. We krijgen dan een graaf waarin in elk hoekpunt (roosterpunt) een even aantal, nl. acht, lijnstukken samenkomen. Tracht deze graaf in één, aftelbaar oneindige, trek te doorlopen.
Als dat u niet lukt, ontwerp dan een triangulatie van het vlak die wel in één aftelbaar oneindige trek doorlopen kan worden.

Oplossingen

497. Te bewijzen: het produkt van de eerste vijftig oneven getallen is kleiner dan $\frac{1}{10}$ maal het produkt van de eerste vijftig even getallen.
Dus te bewijzen:

$$10 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 < 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100$$

of

$$100 \cdot (1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99)^2 < (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100)^2$$
$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 99 \cdot 99 < 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 98 \cdot 100$$

Dit volgt uit

$$1 \cdot 3 < 2 \cdot 2$$
$$3 \cdot 5 < 4 \cdot 4$$
$$\ldots$$
$$97 \cdot 99 < 98 \cdot 98$$
$$99 < 100$$

498. Iemand gooit een munt op. Op het moment dat de munt zijn hoogste punt bereikt, schiet een ander erop. Moet hij op de munt richten, erboven of eronder?
Vanaf het moment van het schieten tot het moment van het raken 'vallen' munt en projectiel evenveel. De schutter moet dus op de munt richten.

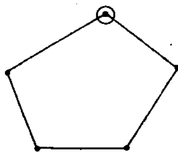
499. Grondbegrippen van een axiomastelsel zijn lijn en punt. Een lijn is een verzameling punten.
Definitie. Punt P ligt op lijn l (l gaat door P) $\overset{\text{def}}{=} P \in l$.
Definitie. De lijnen l_1 en l_2 zijn evenwijdig $\overset{\text{def}}{=} l_1 \cap l_2 = \phi$.
Axioma 1. Er is minstens één punt.
Axioma 2. Op elke lijn liggen precies twee punten.
Axioma 3. Door elk punt gaan precies twee lijnen.
Axioma 4. Bij elke lijn l zijn er precies drie lijnen die evenwijdig aan l zijn.
Onderzoek dit axiomastelsel. Vind een model. Zijn de axioma's onafhankelijk?
Onderstel er zijn precies n punten.
Er zijn dan ook precies n lijnen. (A2, A3)
Er is een punt P. (Al)
Door P gaat een lijn. (A3)
Op deze lijn ligt een van P verschillend punt Q. (A2)
Er zijn precies $n - 2$ lijnen die niet door P gaan. (A3)
Van deze lijnen gaat er precies één door Q. (A3, A2)
Er zijn dus precies $n - 3$ lijnen die niet door P en niet door Q gaan, d.w.z. evenwijdig zijn aan de lijn $\{P, Q\}$.
Dan is $n - 3 = 3$ (A4) en dus $n = 6$.
Het kost nu weinig moeite aan te tonen, dat alle modellen van het axiomastelsel isomorf zijn met een van de volgende twee.



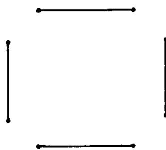
De zes hoekpunten van het model zijn de punten. De eindpuntenparen van de zes lijnstukken de lijnen.

De axioma's zijn onafhankelijk.
Model voor A2 $\wedge$ A3 $\wedge$ A4 $\wedge$ $\neg$A1. De lege verzameling lijnen.

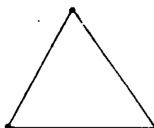
Model voor A1 $\wedge$ A2 $\wedge$ A4 $\wedge$ $\neg$A3. De volgende vijf punten en zes lijnen. Eén van de lijnen bevat slechts één punt, namelijk het omkringde punt.



Model voor A1 $\wedge$ A3 $\wedge$ A4 $\wedge$ $\neg$A2. De volgende acht punten en vier lijnen.



Model voor A1 $\wedge$ A2 $\wedge$ A3 $\wedge$ $\neg$A4. De volgende drie punten en drie lijnen.



500. Er ontstaat een contradictie. Dan zijn de uitgangsuitspraken met elkaar strijdig. Waarin zit deze strijdigheid?
Overeengekomen is, dat Euathlos aan Protagoras een zekere som betaalt, dan en alleen dan als hij zijn eerste proces voor het hof wint. (A)
Dit is op zichzelf niet strijdig. Er zijn talloze situaties mogelijk waarin deze afspraak zonder enige moeite uitvoerbaar is. Er zijn echter situaties denkbaar waarin moeilijkheden optreden. Een dergelijke situatie is hier geschetst. D.w.z. de uitspraak A in combinatie met de uitspraken:
het eerste proces waarin E. als verdediger optreedt, is een proces waarin hij door P. aangeklaagd wordt;
de aanklacht luidt: je bent mij geld verschuldigd omdat je nog geen enkel proces gevoerd hebt
leidt tot een contradictie.
Van een eigenlijke paradox is dus geen sprake.
Men kan het voorgaande vergelijken met de bekende dorpsbarbier die alle mensen in het dorp scheert die zichzelf niet scheren. Hier is de contradictie al zonder meer gegeven (ten minste als we aannemen dat de dorpsbarbier in het dorp woont). In ons geval is de contradictie eerst aanwezig als we 'axioma's' toevoegen, d.w.z. als we een concrete situatie scheppen die de contradictie doet ontstaan.

Korrel

Vrouwen en Wiskunde

Op 1, 2 en 3 juli had het derde tweejaarlijkse congres plaats van de Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars. Zoals steeds was het een groot succes. Maar dat is niet de aanleiding tot deze korrel.
Op de deelnemerslijst kwamen 169 Vlaamse deelnemers voor, en wel 100 mannelijke en 69 vrouwelijke. Het grote aantal vrouwelijke deelnemers was geen toeval; op bijeenkomsten van de VVWL ziet men steeds veel vrouwelijke deelnemers, relatief veel meer dan in Nederland.
In Nederland is er iets mis in de relatie vrouw-wiskunde. In Vlaanderen is dit niet of althans in veel mindere mate het geval. Hoe komt dit? Op deze vraag weet ik geen antwoord te geven. Wel vraag ik me af: als het in Vlaanderen zoveel beter gaat, zou het dan niet verstandig zijn als de Nederlandse vrouwen bij hun zuiderburen te rade gingen om na te gaan waarom het daar beter gaat? Misschien zou dit kunnen bijdragen tot een oplossing van onze problemen.

P. G. J. Vredenduin

Boekbesprekingen

C. F. Gardiner, *Modern Algebra*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, Engeland, 288 blz., £ 5,90.

Dit boek, gebaseerd op colleges die de schrijver gedurende vele jaren gaf aan de universiteit van Exeter, is bestemd voor eerste jaars studenten wiskunde.
De overgang van school naar universiteit is, zoals ook bij ons blijkt, nogal groot. Speciaal door het plotselinge hoge abstractieniveau waarop geëxcerceerd wordt. Enerzijds is het uitermate belangrijk dat de student al in een vroeg stadium met het proces van abstractie geconfronteerd wordt, anderzijds moet het duidelijk zijn waarom de abstracte benadering noodzakelijk is. De schrijver stelt zich ten doel deze abstracties op zo natuurlijk mogelijke wijze te introduceren en in toepassingen te demonstreren. Vandaar de ondertitel: A natural approach, with applications. Na een paar inleidende paragrafen behandelt de schrijver een aantal onderwerpen over verzamelingen, functies, relaties, equivalentierelaties, waarna hij de gehele, rationale, reële en complexe getallen introduceert. Hierbij bespreekt hij tevens enige elementaire zaken omtrent ringen en lichamen. Vervolgens behandelt hij een behoorlijke brok lineaire algebra tot en met eigenwaarden, eigenvectoren en klassificatie van kwadrieken. In het laatste hoofdstuk komen nog enige zaken aan de orde betreffende groepen, euclidische ringen en toepassingen op het gebied van de getallentheorie. De oplossingen van de opgaven, een literatuurlijst en een index sluiten het boek af.
Al met al een uitstekend leerboek waarin de schrijver de door hem gestelde doelstellingen volledig waarmaakt.

W. Kleijne

D. G. B. Edelen, *Isovector methods for equations of balance*, Sythoff & Noordhoff (1981), Monograph and textbooks on mechanics of solids and fluids, Sub-series Mechanics: Analysis, vol. 5, *f*90,–.

In het begin van de zestiger jaren ontstond grote belangstelling voor een speciaal type oplossing van zekere niet-lineaire golfvergelijkingen. Zulke oplossingen waren sinds 1895 bekend, toen onze landgenoten Korteweg en De Vries ze vonden bij de vergelijking die sindsdien hun namen draagt: een enkele onvervormd voortlopende golf in een niet-lineair medium. Dit resultaat werd als een mathematische curiositeit beschouwd totdat, twintig jaar geleden, deze golven een onverwachte extra eigenschap bleken te bezitten: twee zulke golven op elkaar afgevuurd blijken de botsing te overleven in de zin dat zij op den duur weer in hun oorspronkelijke vorm terugkeren. Dit voor een niet-lineair medium uiterst opmerkelijk gedrag wettigde een nieuwe naam: de *soliton*; en soliton oplossingen voor niet-lineaire golfvergelijkingen leverden weldra een vruchtbaar verklaringsprincipe voor diverse problemen in de fundamentele natuurkunde.
Tevens betekende deze ontdekking werk aan de winkel voor wiskundigen. Soliton oplossingen bleken voor te komen bij vergelijkingen, die zo op het oog geen enkele mathematische verwantschap vertoonden – sterker: bleken een systematisch verschijnsel in een gebied dat nagenoeg gekenmerkt wordt door het ontbreken van systematische methodiek: de niet-lineaire golftheorie.
Intussen zijn voor de mathematische studie van de bedoelde verschijnselen twee methoden tot ontwikkeling gekomen die in uitgangspunt en uitwerking nogal verschillen, en waartussen de onderlinge relaties nog altijd niet geheel duidelijk zijn. De eerste methode legt een verrassend verband tussen oplossingen van sommige niet-lineaire golfvergelijkingen en het inverse probleem uit de spectraaltheorie: door een kunstgreep slaagt men erin een niet-lineair probleem op te lossen door toepassing van (uiterst gecompliceerde maar) lineaire middelen. Over deze kant van de zaak verscheen dit jaar bij North-Holland een inleidend boek van de hand van prof. dr. W. Eckhaus en dr. A. van Harten: *The inverse scattering transformation and the theory of tons*, waarnaar ik belangstellenden graag verwijs.
Het boek dat thans wordt besproken is bij mijn weten de eerste uiteenzetting in boekvorm van de tweede methode. Voor de goede orde: het gaat hier – anders dan bij het zoëven genoemde boek – in het geheel niet om de fysische soliton-theorie, uitsluitend om de formele wiskundige achtergronden van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, van de tweede orde, die in de vorm van een

divergentievergelijking kunnen worden gebracht. Het doel van de beschouwing is nu de studie van de meetkundige structuur van de oplossingsruimte. Een klassiek model hierbij is de Backlund-transformatie, waarbij, uitgaande van één oplossing, door substitutie en iteratie een keten van oplossingen van niet-lineaire vergelijkingen wordt gegenereerd, bij sommige vergelijkingen een keten van oplossingen van steeds dezelfde vergelijking. Deze methode wordt nu vergaand gegeneraliseerd in een differentiaalgeometrisch kader. Zoals vaker in een algemene theorie, wordt begonnen de differentiaalvergelijking om te zetten in een geschikt gekozen stelsel van vergelijkingen van de eerste orde. Hiertoe voert men als gebruikelijk nieuwe afhankelijke en onafhankelijke variabelen in, waarbij het verband tussen oude en nieuwe variabelen wordt gegeven door bepaalde differentiaalvormen van de eerste orde, de zogenaamde contactvormen. Bijzonder belangrijk blijkt nu het gesloten ideaal van de algebra gegenereerd door de contactvormen. Op de variëteit beschreven door de (uitgebreide) onafhankelijke coördinaten blijken vectorvelden voor te komen (nauw verwant met de karakteristieken van bepaalde eerste orde stelsels) waarlangs elementen van het contactideaal worden omgezet in andere elementen: de *isovectoren* van de titel van het boek. Geschikt gekozen uitbreidingen van deze isovectoren vormen een Lie algebra, die bij een gegeven oplossing van het oorsponkelijke stelsel een Lie groep van nieuwe oplossingen genereert: de gewenste generalisatie van de Backlund-transformatie.
Speciale versies van de theorie bestaan ingeval de gezochte oplossingen geschreven kunnen worden als gradient van een (pseudo)potentiaal, en als de beheersende vergelijkingen de Euler-vergelijkingen van een variatie-principe zijn: aangetoond wordt dat elk stelsel tweede orde vergelijkingen van het divergentietype door invoering van extra variabelen kan worden omgezet in een variationeel stelsel.
De lezer zal inmiddels hebben begrepen dat hier sprake is van een uitermate technisch boek: de nadruk ligt geheel op de manipulatie van expliciete formules. Een heel hoofdstuk betreft het volgende punt: de berekening van isovectoren voert tot zeer omvangrijke stelsels, zo leidt een scalaire tijdafhankelijke vergelijking in $\mathbb{R}^3$ tot een stelsel van 126 vergelijkingen. Aangegeven wordt hoe deze vergelijkingen m.b.v. een formule manipulatie programma door een rekenmachine kunnen worden gegenereerd. Deze concrete inslag betekent echter tevens een belangrijke beperking van het boek. Door de schrijver wordt bewust afgezien van aansluiting bij de moderne begripsvorming en notaties uit de differentiaalmeetkunde. In de eerste plaats betekent dit natuurlijk gewoon een vervreemdings-effect voor de meeste lezers. Ernstiger is dat daarmee ook alle globale aspecten geheel buiten beschouwing blijven, wat teleurstellend is bij een boek waarin op bijna elke bladzijde het woord 'structuur' valt, over een onderwerp waarbij van te voren zeker is dat juist de meest interessante inzichten de globale structuurvragen betreffen.
Verder ontbreekt merkwaardigerwijs ook elke fysische motivering of illustratie: andere dan formele rekenvoorbeelden komen niet voor. Anderzijds wordt de lezer op diverse plaatsen uitgenodigd, vanuit eigen kennis van (zeer geavanceerde) toepassingen, op grond van deze lectuur tot een mathematische 'A-ha Erlebnis' te komen, zodat men zich afvraagt voor wie het boek bedoeld is.
Samenvattend: het boek is een helder becommentariëerde formuleverzameling. Dat kan op zich best nuttig zijn, zeker wanneer zoals hier naar volledigheid wordt gestreefd. De presentatie wordt daardoor onvermijdelijk dor, de voortdurende opeenstapeling van technisch detail noodt niet tot doorlezen. Wiskundig wordt door de lokale optiek aan de meest interessante aspecten van het onderwerp voorbijgegaan. Lezers, die om een of andere reden een basis zoeken, van waaruit zij met minimale mathematische voorkennis concrete berekeningen aan solitonen kunnen uitvoeren, zullen er wel hun voordeel mee kunnen doen.

prof. dr. G. Y. Nieuwland

R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization, Vol. 2: Constrained Optimization*, J. Wiley & Sons, Chicester, 1981, 224 pp.

Deze recensie betreft het tweede deel van een boek in twee delen. Een bespreking van het eerste deel verscheen in het aug/sep-nummer van dit blad. In veel opzichten lijkt een verwijzing naar die eerdere recensie zeer op zijn plaats, daar men er niet aan ontkomt de beide delen, dit deel begint met hoofdstuk 7, als één geheel op te moeten vatten. Wat voor het ene deel geldt, geldt ook voor het andere, ondanks de verschillen in onderwerpen die er in behandeld worden.
De overeenkomst tussen beide delen betreft uiteraard de auteur en zijn methode van schrijven. Zoals gezegd in de recensie van het eerste deel is deze auteur een van de groten op het gebied van de niet-

lineaire optimalisering en munt hij daarnaast nog in het bijzonder uit door zijn gave de grondgedachten achter de methoden helder en duidelijk te kunnen presenteren. Ook in dit tweede deel komen deze kwaliteiten van de auteur weer duidelijk naar voren.
Qua onderwerpen bevat dit tweede deel, dat overigens ongeveer twee maal zo dik is als het eerste (224 blz. in plaats van 120 blz.), veel meer dan men in vergelijkbare boeken over hetzelfde onderwerp kan aantreffen. Behalve de gebruikelijke hoofdstukken over de noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor optimaliteit en een behandeling van de gebruikelijke klassen van niet-lineaire-programmeringsmethoden, dat wil zeggen, de boete functiemethoden, de actieve-setmethoden en de Lagrange functiemethoden, bevat dit deel ook nog twee hoofdstukken over lineair programmeren en kwadratisch programmeren, beide behandeld vanuit het gezichtspunt van een niet-lineaire programmeur, en nog twee hoofdstukken over gemengde-integer-programmering, geometrische programmering en over het optimaliseren van niet-differentieerbare functies.
Zoveel onderwerpen in een boek heeft noodzakelijkerwijs tot gevolg dat geen van deze onderwerpen een uitgebreide behandeling krijgt, tenzij dat gebruik wordt gemaakt van een zeer beknopte manier van schrijven. Daarvan is in dit boek in sterke mate gebruikt gemaakt. Het resultaat is dat het boek niet gerangschikt kan worden tot de eenvoudig te lezen boeken voor niet-ingewijden. Anderzijds geldt echter ook dat niemand met een meer dan rudimentaire wiskundige training werkelijk problemen zal hebben met het lezen ervan.
Voor ingewijden en werkers in aanverwante interessegebieden is het een boek met een bijzonder grote hoeveelheid informatie en een helder inzicht in de materie. Juist als het eerste deel laat ook dit tweede deel zich het best karakteriseren als een uitgebreid en up-to-date overzichtsartikel over de kennis en ervaring die op dit moment bekend is op het gebied van de numerieke methoden voor het oplossen van niet-lineaire optimaliseringsproblemen.
De eindconclusie van deze recensent ligt voor de hand. De twee delen van dit boek zijn een 'must' voor díe wiskundigen die in hun werk te maken hebben met niet-lineaire optimalisering; ze kunnen warm worden aanbevolen aan iedereen met belangstelling voor dit speciale vakgebied.

J. L. de Jong

G. Meinardus, G. Merz, *Praktische Mathematik II*, Bibliographisches Institut, Mannheim – Wien – Zurich, 1982, 417 blz.

Dit boek is evenals het reeds in Euclides 56, 2, p 77 besproken eerste deel een inleiding in de numerieke wiskunde. In dit deel komen aan de orde het oplossen van lineaire en niet-lineaire stelsels vergelijkingen, de berekening van eigenwaarden van matrices, de Euler getransformeerde van een reeks, het Remez algoritme ter berekening van de Chebychev benadering van een functie, de numerieke integratie van beginwaarde problemen (gewone differentiaalvergelijkingen) en randwaarde problemen voor gewone differentiaalvergelijkingen. De behandeling van de onderwerpen is van wisselende kwaliteit. Het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen wordt netjes behandeld. Met een op Prof. van der Sluis teruggaande stelling wordt op goede wijze het verband tussen het equilibreren van een matrix en het conditiegetal uitgelegd. De behandeling van eigenwaardeproblemen is daarentegen ronduit teleurstellend. Zo wordt de introductie van dé Hessenberg-gedaante van een matrix gemotiveerd door de eenvoudige berekenbaarheid van het karakteristieke polynoom van zo'n matrix. Het is echter wijd en zijd bekend dat de coëfficiënten van het karakteristieke polynoom van een matrix de eigenwaarden veelal veel slechter representeren dan de matrix zelf. Voor de berekening van eigenwaarden stelle men dan ook niet het karakteristieke polynoom op. Er zijn betere methoden, zoals het ingeburgerde QR-algoritme. Het is onbegrijpelijk dat de auteurs dit algoritme zelfs niet noemen.
Binnen het bestek van dit boek worden de overige onderwerpen weer op goed niveau behandeld, zij het dat evenals in deel I vrijwel geen aandacht aan de implementatie wordt geschonken. Het is dan ook wat verrassend als aanhangsel bij het hoofdstuk over de numerieke behandeling van gewone differentiaalvergelijkingen richtlijnen aan te treffen over het gebruik van oplosmethoden. Het ware beter indien verwijzingen naar goede 'codes' (geïmplementeerde algoritmen) gegeven zounden zijn.
Dit boek is helaas niet in alle opzichten up-to-date. Het is te hopen dat de schrijvers snel een gewijzigde versie publiceren.

M. van Veldhuizen

Mededelingen

De redactie is onlangs uitgebreid met twee nieuwe leden:
Cor Nagtegaal is wiskundedocent aan een lerarenopleiding in Amsterdam; Willem van Gaans werkt aan een Mavo in Roosendaal en is betrokken bij het Mavoproject.
Door hun komst zijn vrijwel alle typen wiskundeonderwijs binnen de redactie vertegenwoordigd.
Wij heten hen van harte welkom.

de redactie

Examen wiskunde l.o.

De staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen brengt ter kennis van belanghebbenden, dat zij die in 1984 willen deelnemen aan het examen voor de akte wiskunde l.o., zich *na 1 januari en vóór 15 februari 1984* dienen aan te melden door storting of overschrijving van het examengeld, dat voor het jaar 1984 is vastgesteld op *f* 85,–, op postrekening 427399 ten name van: De voorzitter van de examencommissie wiskunde l.o. te Almelo.
Op de girokaart moeten de naam van de kandidaat, zijn of haar geslacht, adres, postcode en woonplaats worden vermeld.
Het schriftelijk gedeelte van het examen zal plaatsvinden op 25 en 26 april 1984 en het mondeling gedeelte in de maand juli 1984.
Met nadruk wordt er op gewezen, dat aanmeldingen die na 15 februari 1984 binnenkomen, niet meer in behandeling worden genomen.

De negende gemeenschappelijke studiedag van NVvW en VVWL

Deze heeft plaats op *zaterdag 24 maart* in Breda, motel Brabant.
Agenda
vanaf 10 uur ontvangst
10.30 opening
voordracht van Jos De Schryver, leraar aan het Rijksinstituut voor Chemie en Textiel te Gent, over *Integralen in het secundair onderwijs*
11.30 voordracht van Louis Maassen, docent in de didactiek van de wiskunde aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, over *Integraalrekening en* $\mathbb{R}$
12.30 lunch
14.00 voordracht van Jan Anseeuw, leraar aan het Bisschoppelijk Lyceum van de Grauwe Zusters te Roeselare, over *De spilmethode en haar toepassing in de lineaire algebra*
15.00 voordracht van Paul Drijvers, medewerker in de vakgroep stochastiek van de TH Twente, over *Differentiaalvergelijkingen in het vwo* (zie zijn artikel in Euclides no. 1 van deze jaargang op blz. 29-30)
16.00 sluiting
Wie aan de gemeenschappelijke lunch wil deelnemen, wordt verzocht *f* 15,– te storten op giro 143917 t.n.v. de NVvW te Amsterdam, *voor 15 maart*, onder vermelding 'lunch 24 maart'.
Motel Brabant is bereikbaar per auto
uit de richtingen Rotterdam en Roosendaal: richting Breda, Utrecht aanhouden, de snelweg verlaten

bij de afslag Bavel, linksaf slaan onder het viaduct door, men ziet dan het motel aan zijn rechterhand; uit de richtingen Gorkum en Tilburg: richting Breda, Roosendaal aanhouden, de snelweg verlaten bij de afslag Bavel, men ziet het motel dan aan zijn rechterhand.
Treinreizigers nemen bus 2 of 6 en stappen uit bij de halte Zorgvlietstraat.

Jaarvergadering van de VVWL

De jaarvergadering van de VVWL vindt plaats op *zaterdag 25 februari 1984* op de Campus 'Oefenplein' van de Vrije Universiteit Brussel (adres: Pleinlaan 2, 1050 BRUSSEL), gebouw Q.
Agenda
vanaf 9.30 uur ontvangst
10.00 opening door voorzitter Frank Laforce
10.10 samenstelling van de kascommissie
10.15 Michaëlla Torfs (Koninklijk Atheneum Koekelberg): *Wat is een veelterm?*
11.20 dr. Guido Dedene (Boerenbond Leuven): *Differentiaal versus afgeleide*
12.30 lunch
14.00 prof. Alfred Warrinnier (Katholieke Universiteit Leuven): *Wiskunde en taal*
14.45 forumgesprek over *Wiskunde en taal* (tot 15.55)
16.00 statutaire algemene vergadering van de VVWL:

1. opening
2. jaarverslagen
3. verslag van de kascommissie en decharge van de penningmeester
4. bestuursverkiezing
5. rondvraag
6. sluiting

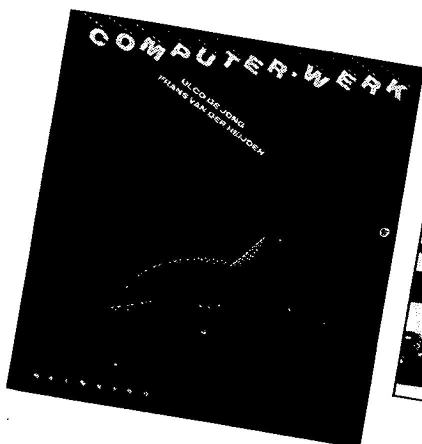
De deelnemers kunnen de lunch gebruiken in het universiteitsrestaurant.
De Campus 'Oefenplein' van de Vrije Universiteit Brussel ligt naast het spoorwegstation van Etterbeek. *Treinreizigers* kunnen in het Brussels Noordstation om 9.29 de stoptrein Brussel Noord-Ottignies nemen; afstappen in Etterbeek om 9.42.

Kalender

(zie voor nadere informatie ook de vorige nummers)
zaterdag 7 januari 1984 Wintersymposium Wiskundig Genootschap, Utrecht
woensdag 11 januari 1984 Bestuursvergadering NVvW
woensdag 25 januari 1984 Vergadering afgevaardigden van de besturen V en W (Vrouwen en Wiskunde) en NVvW
23-24 februari 1984 VULON congres, Beekbergen
zaterdag 25 februari 1984 jaarvergadering VVWL, Brussel, België
13-16 maart 1984 Bundestagung für Didaktik, Oldenburg, Duitsland
20-24 maart 1984 Internationale Lehrmittelmesse DIDACTA 84, Basel, Zwitserland
zaterdag 24 maart 1984 9de gemeenschappelijke studiedag NVvW-VVWL, Breda

MALMBERG
VOOR UW INFORMATICA-ONDERWIJS

COMPUTER-WERK

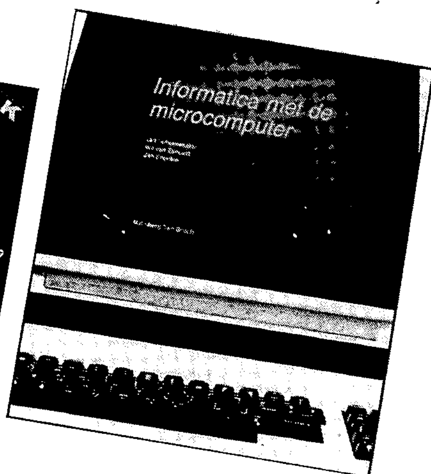


Burgerinformatica voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs.

"Computer-werk" sluit aan bij de recente discussies over burgerinformatica en computerbewustwording.
De opbouw van het boek weerspiegelt enerzijds de diverse toepassingsgebieden van de computer, anderzijds de stappen die de leerlingen nemen in het leren begrijpen van eenvoudige programma's.

Bij het boek hoort een geïntegreerd softwarepakket.

INFORMATICA MET DE MICROCOMPUTER



Informatica voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs.

"Informatica met de microcomputer" is een leerboek waarin het begrip informatica vanuit verschillende invalshoeken benaderd wordt.
Niet alleen aan het beheersen van een programmeertaal, maar vooral ook aan probleemformulering en probleemanalyse wordt ruime aandacht geschonken.

malmberg

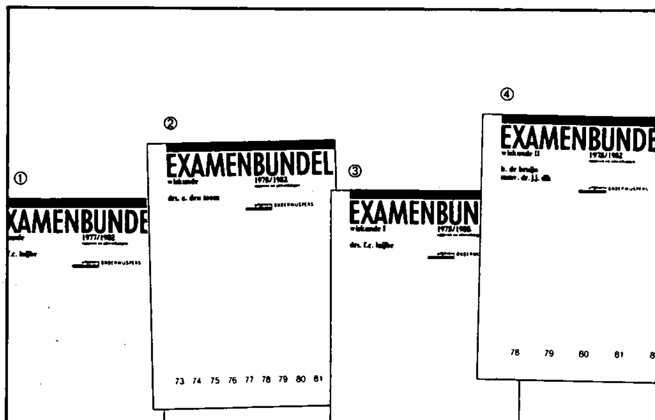
Uitgeverij Malmberg
Postbus 233
5201 AE Den Bosch
Tel.: 073-215565

opgaven en uitwerkingen

Leerlingen willen oefening. In de loop van het examenjaar als ze zich voorbereiden op schoolonderzoeken en na het laatste schoolonderzoek als ze zich voorbereiden op het examen. De ene leerling wil plotseling een serie oude examens doorwerken, de andere maakt het liefst systematisch iedere week een aantal opgaven. De een loopt makkelijk vast en heeft per opgave een duwtje nodig, de ander oefent moeiteloos maar wil wel steeds even weten of zijn werk in orde is.

Dankzij de uitwerkingen in onze EXAMENBUNDELS kunt u de *klassikale behandeling* van examens beperkt houden en hebt u meer tijd om in te gaan op de leerstof. Iedere leerling kan in zijn eigen tempo oefenen op de momenten dat hij zich het best concentreert.

De uitwerkingen maken ook een doeltreffender *individuele begeleiding* mogelijk. Zwakkere leerlingen die u extra laat oefenen kunnen hun werk zelf nakijken. Dat stelt ze in staat nauwkeurig aan te geven op welke punten ze nadere uitleg nodig hebben.



Bovendien scheppen de uitwerkingen de mogelijkheid tot *zelfstandige voorbereiding* op het examen in de periodes dat er geen lessen zijn: de vakanties en de laatste weken die voorafgaan aan het examen.
Onze uitgaven zijn verkrijgbaar bij de boekhandel. Wilt u inlichtingen, aarzelt u dan niet ons te bellen.

uitgeverij **ONDERWIJSPERS**
Hobbemakade 73
1071 XN Amsterdam
☎ 020-768026

① MAVO EXAMENBUNDEL WISKUNDE
1978 t/m 1983
f 10,-

② HAVO EXAMENBUNDEL WISKUNDE
1973 t/m 1983
f 12,50

③ VWO EXAMENBUNDEL WISKUNDE I
1975 t/m 1983
f 12,50

④ VWO EXAMENBUNDEL WISKUNDE II
1979 t/m 1983
f 12,50

een maand na het examen verschijnen bijgewerkte herdrukken, met daarin de opgaven van 1984

INHOUD:

ADRESSEN VAN AUTEURS

H. Broekman, Ped. Did. Inst. der RU Utrecht, Heidelberglaan 2, postbus 80-120, 3508 TC Utrecht

C. H. G. Hegeman, Heymanscollege, Nieuwe Sint Jansstraat 11, 9711 VG Groningen

M. C. van Hoorn, Sloep 102, 9732 CE Groningen

J. V. Jansen, Heymanscollege, Nieuwe Sint Jansstraat 11, 9711 VG Groningen

E. Kamerich, St Annastraat 95, 6524 EJ Nijmegen

T. Lecluse, Vergiliuslaan 8, 5926 SM Venlo

P. W. H. Lemmens, Math. Inst. der RU Utrecht, Budapestlaan 6, 3508 TA Utrecht

M. van Steenis, Heymanscollege, Nieuwe Sint Jansstraat 11, 9711 VG Groningen

P. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth